UC-NRLF
C 3 169 819

...ONOMY, MATHEMATICS-
STATISTICS LIBRARY

Math. Dept.
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received JUN 26 1895, 18
Accessions No. 60301. Class No.

FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

1890-91

COURS D'ANALYSE

PROFESSÉ PAR

M. DEMARTRES

ET RÉDIGÉ PAR

M. E. LEMAIRE

DEUXIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

8, Rue de la Sorbonne, 8

1892

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

QA 300
D4
v. 2
Math.
dept.

60301

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

TABLE DES MATIÈRES

I. Fonctions analytiques en général.

Ire LEÇON. — Définition d'une fonction de variable complexe. — Fonctions analytiques. — Représentation conforme. — Systèmes orthogonaux et isothermes 1

IIe LEÇON. — Fonctions simples fondamentales. — Points singuliers. — Fonctions exponentielle, circulaire. — Fonctions multiformes. — Irrationnelles. — Logarithmes. 10

IIIe LEÇON. — Extension du calcul différentiel et intégral aux fonctions analytiques. — Fonctions de plusieurs variables. — Dérivées partielles. — Différentielle totale. — Fonctions composées, implicites. — Déterminants fonctionnels. — Séries. 20

IVe LEÇON. — Intégrales définies. — Contours fermés. — Théorèmes et formules de Cauchy. 30

Ve LEÇON. — Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet. — Formule de Green. — Problème de Dirichlet dans le cas d'un cercle. — Réduction dans le cas général à une question de minimum. 41

II. Fonctions uniformes.

VIe LEÇON. — Série de Maclaurin. — Calcul d'une fonction de proche en proche. — Fonction holomorphe ou meromorphe dans une aire donnée. — Propriétés des zéros et des pôles. — Ordre. — Fonctions entières. — Fonctions fractionnaires. . 49

VIIe LEÇON. — Série de Laurent. — Série de Fourier. — Singularités des fonctions uniformes. — Théorie des résidus. — Identité de deux fonctions uniformes. 60

VIIIe LEÇON. — Représentation analytique des fonctions uniformes. — Théorèmes de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler. 72

IXe LEÇON. — Fonctions entières. — Facteurs primaires. — La fonction s (z) 80

Xe LEÇON. — Théorème des fonctions uniformes qui admettent un théorème d'addition. — Notion de la double périodicité 89

III. Fonctions doublement périodiques.

XIe LEÇON. — La fonction $\sigma(z)$. — Les fonctions ζ, p. — Expression générale des fonctions uniformes doublement périodiques de première, de seconde et de troisième espèce. 97

XIIe LEÇON. — Propriétés des fonctions doublement périodiques. — Décomposition en éléments simples. — Formule de M. Hermite. — La fonction $p(z)$ et les fonctions elliptiques 107
XIIIe LEÇON. — Les fonctions σ_1, σ_2, σ_3, sn, cn, dn. — Les fonctions Θ 114

IV. Fonctions multiformes.

XIVe LEÇON. — Fonctions algébriques. — Continuité. — Points critiques. — Lacets 126
XVe LEÇON. — Fonctions implicites. — Fonction inverse. — Intégrales des fonctions algébriques. — Intégrale logarithmique. — Intégrales hyperelliptiques 135
XVIe LEÇON. — Inversion de l'intégrale elliptique. — Définition et propriétés fondamentales des fonctions elliptiques déduites de l'intégrale 144
XVIIe LEÇON. — Courbes de genre *un*. — Intégrales abéliennes. — Courbes de genre *un*. — Propriétés des cubiques planes. — Biquadratique gauche 154

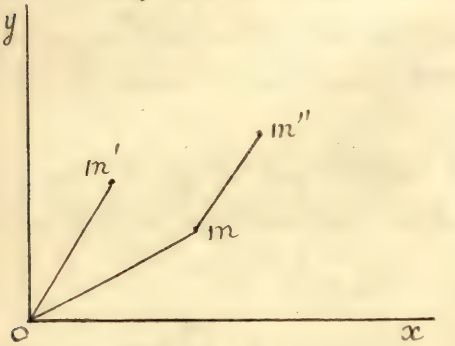
Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Première Leçon.

Fonctions de variables complexes.

I. — Une quantité imaginaire $z = x + iy$ peut être représentée dans un plan par le point m dont les coordonnées sont x et y; m s'appelle l'image de z. Inversement à tout point m correspond sans ambiguïté une imaginaire $z = x + iy$ qu'on appelle l'affixe de m. On sait que le module r de z est égal à la distance de m à l'origine, cette distance étant prise en valeur absolue. Son argument est l'angle dont il faut faire tourner Ox dans le sens direct pour l'amener à coïncider avec la demi-droite Om; il est déterminé à un multiple de 2π près. On sait de plus que deux imaginaires z et z' ayant pour images m et m', si on mène par m une droite mm'' égale et parallèle à Om' et de même sens, l'affixe de m'' sera égale à $z + z'$. Enfin le produit de plusieurs imaginaires s'obtient en faisant le produit de leurs modules et la somme de leurs arguments.



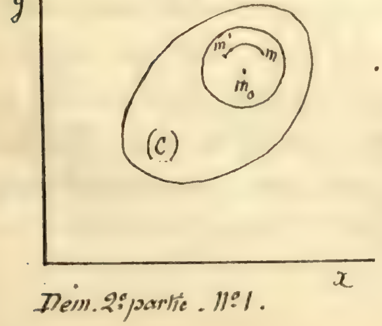
Lorsque x et y sont indépendants et que l'image de z se déplace dans une aire (c); on dit que (c) est le champ de la variable z. Considérons deux fonctions de x et y.

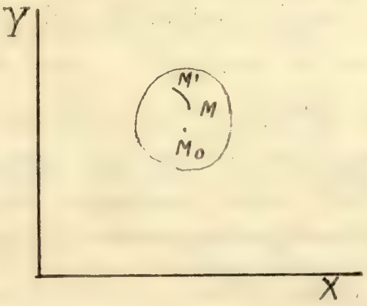
$$X = \varphi(x, y) \qquad Y = \psi(x, y)$$

indépendantes l'une de l'autre, mais déterminées dans le champ (C). La quantité $u = X + iY$ se trouve déterminée pour chaque valeur de z on dit qu'elle est fonction de z et exprime cette dépendance en écrivant

$$u = f(z)$$

Au point m image de la variable correspond un point M image de la fonction dont les coordonnées sont $X = \varphi(x, y)$ $Y = \psi(x, y)$. La fonction peut être représentée soit dans le même plan que la variable soit dans un plan différent.





Définitions. — Si à une position de m correspond un point unique M, on dit que la fonction est bien déterminée dans le champ (C). Pour cela il faut et il suffit que X et Y soient deux fonctions bien déterminées de x, y.

Si quelle que soit la position de m dans (C), le module de u reste inférieur à un nombre fixe A, la fonction est dite finie dans le champ (C). Pour cela il est nécessaire et suffisant que X et Y soient elles-mêmes finies dans l'intérieur de (C)

Nous dirons que u est continue au point m_0 du champ (C), si étant donné un nombre positif ε quelconque, on peut décrire du point m_0 comme centre un cercle de rayon η tel que pour toutes les valeurs de z intérieures à ce cercle, toutes les valeurs correspondantes de u restent à l'intérieur du cercle de rayon ε decrit de M_0 comme centre. En d'autres termes, u est continue au point m_0 si on peut donner à la variable z, dans une direction quelconque, à partir de z_0, un accroissement de module assez petit pour que le module de l'accroissement de la fonction reste inférieur à ε.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que X et Y soient continues pour $x = x_0$ $y = o$. En effet si la fonction est continue on doit avoir:

$$(1) \qquad \left[\varphi(x, y) - \varphi(x_0 y_0)\right]^2 + \left[\psi(x, y) - \psi(x_0 y_0)\right]^2 < \varepsilon^2.$$

pour toutes les positions de m intérieures au cercle de rayon η. Or ceci ne peut avoir lieu que si chacune des differences $\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)$ et $\psi(x, y_0) - \psi(x_0 y_0)$ est elle-meme inférieure à ε.

Réciproquement, si X et Y sont continues, on peut choisir η assez petit pour que chacune des différences précédentes reste en valeur absolue inférieure à $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ et dès lors l'inegalité (1) sera vérifiée.

D'après cela, si m se rapproche indéfiniment de m_0 en suivant une direction quelconque, $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ auront respectivement pour limites $\varphi(x_0 y_0)$ et $\psi(x_0 y_0)$ donc $f(z)$ aura $f(z_0)$ pour limite. C'est une autre manière d'exprimer la continuité au point z_0.

Si la fonction $f(z)$ est continue en chaque point du champ (C) nous dirons qu'elle est continue dans le champ (C).

Remarque. — Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit continue dans l'aire (C) et sur le contour de cette aire; elle sera alors uniformément continue, c'est-à-dire, que la quantité η précédemment définie pour un point m_0 de cette aire pourra, ε étant donné, être prise toujours la même, quelle que soit la position de m_0 dans l'aire ou sur son contour. En effet, X et Y fonctions de variables réelles, étant continues dans (C) et sur son contour, on sait[1]

---

[1] Voir 1ère Partie — page 118.

qu'on peut trouver un même nombre η pour toute position de m_0 dans (C) ou sur son contour, et tel qu'on ait

$$\text{mod}\ \Delta X < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\text{mod}\ \Delta Y < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tant qu'on reste à l'intérieur du cercle de rayon η ; par suite on aura dans les mêmes conditions

$$\text{mod}\ \Delta u < \varepsilon$$

η étant pris toujours le même.

II. — Supposons qu'on donne à z un accroissement Δz représenté par le segment $m\,m'$ la fonction $u = f(z)$ prend un accroissement correspondant Δu représenté par le segment MM', et si elle est continue, lorsque m' se rapproche indéfiniment du point m en suivant un chemin quelconque, cet accroissement tend vers zero. Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ peut tendre vers une limite finie, mais si X et Y ont été choisies arbitrairement cette limite dépendra en général de la courbe suivie par m' pour se rapprocher de m. Un exemple simple rend compte de ce fait.

$$\text{Soit}\quad u = x - iy.$$

Si on se déplace parallèlement à l'axe des y à partir de m, on a $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = -1$. Si on se déplace parallèlement à l'axe des x, on a $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = 1$. Si on se deplace dans l'azimut α, c.à.d. si $\Delta y = h \sin\alpha$ $\Delta x = h \cos\alpha$, on aura

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = (\cos\alpha - i \sin\alpha)^2$$

rapport dont la limite varie avec α.

Cela posé, si quelque soit le chemin suivi par m' pour se rapprocher de m, la limite de $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ existe et a une valeur unique au point m, nous dirons que la fonction est monogène en ce point. Dans ce cas la limite de $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ s'appellera la dérivée de la fonction au point m. Pour qu'il en soit ainsi, il faut, nous allons le voir, que X, Y satisfassent à des conditions bien déterminées. Lorsqu'il y aura une dérivée pour toutes les valeurs de z appartenant à un champ (C) cette dérivée sera une fonction $f'(z)$ de z. Les fonctions qui engendrent ainsi une dérivée unique pour chaque point sont dites monogènes dans le champ (C).

Soit toujours $u = X + iY$. Laissons y fixe et donnons à x un accroissement Δx, c'est-à-dire supposons que m' se rapproche de m suivant une parallèle à l'axe des x. On a :

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)}{\Delta x} + i\,\frac{\psi(x+\Delta x, y) - \psi(x,y)}{\Delta x}$$

Pour qu'il y ait une dérivée dans la direction considérée, il faut que les deux termes du second membre aient des limites, c'est-à-dire que φ et ψ soient dérivables par rapport à x, et on aura alors pour la dérivée estimée parallèlement à l'axe des x:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x} \quad (1)$$

Déplaçons-nous maintenant suivant une parallèle à l'axe des y, on a:

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x,y)}{i\,\Delta y} + \frac{\psi(x, y+\Delta y) - \psi(x,y)}{\Delta y}$$

Il faut donc encore ici que φ et ψ soient dérivables par rapport à y; et la dérivée estimée parallèlement à l'axe des y sera:

$$-i\,\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (2)$$

Égalant les deux valeurs (1) et (2) trouvées pour $f'(z)$ nous aurons les deux conditions:

$$(A) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

Il est donc nécessaire que φ et ψ admettent dans le champ (C), des dérivées partielles satisfaisant aux équations (A).

Nous supposerons de plus que les dérivées partielles soient continues et nous allons montrer que dans ce cas les conditions trouvées sont suffisantes. On a en effet, dans le cas général

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) + i\,[\psi(x+h, y+k) - \psi(x,y)]}{h+ik}.$$

Or on peut écrire:

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) = h\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + k\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + h\alpha + k\beta$$

$$\psi(x+h, y+k - \psi(x,y) = h\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + k\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + h\gamma + k\delta$$

$\alpha, \beta\ \gamma\ \delta$ étant des infiment petits): Si donc, on pose $h = \rho\cos\alpha$ $k = \rho\sin\alpha$, on aura, (m et n étant 2 infiniment petits)

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\cos\alpha\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\,(\cos\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + \rho(m+in)}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$$

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\,(\cos\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$$

Éliminons au moyen des conditions (A) supposées vérifiées, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y}$; il vient:

et

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ce qui donne bien une dérivée unique et indépendante de α. —

Nous appellerons analytique une fonction monogène dont la dérivée est continue. Pour qu'une fonction soit analytique, il faut et il suffit, en résumé, que les fonctions φ, ψ aient des dérivées continues et satisfassent aux équations (A)

III. — Revenons aux équations fondamentales (A). Nous démontrerons bientôt que si les fonctions $X = \varphi(x,y)$ $Y = \psi(x,y)$ satisfont aux conditions que nous leur avons imposées, il en est de même de leurs dérivées partielles. En particulier celles-ci admettent elles-mêmes des dérivées partielles continues. Nous pouvons donc différentier les équations (A) la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y\, \partial x} \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial y}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0$$

On aurait de même

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

Donc aucune des fonctions X, Y ne peut être prise arbitrairement ; l'une et l'autre doivent être solutions de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

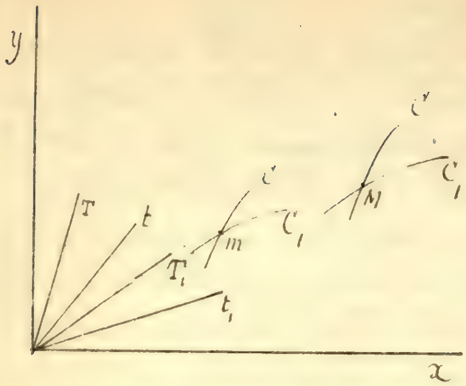
Toutes les fois qu'on aura une solution de $\Delta V = 0$, on pourra la prendre pour partie réelle de la fonction analytique $X + iY$, et Y sera alors déterminé à une constante près, à l'aide des équations (A). L'étude des fonctions analytiques dans toute leur généralité se réduit donc à celle des solutions de l'équation $\Delta V = 0$. On voit par là quel rôle considérable cette équation joue dans l'analyse ; son importance n'est pas moindre en physique mathématique. Nous allons voir comment elle intervient dans d'importantes questions de géométrie.

IV. — Représentation conforme. —

Les équations

$$X = \varphi(x,y) \qquad Y = \psi(x,y)$$

peuvent être considérées comme faisant correspondre à un point m un autre point M situé dans le même plan ou dans un plan différent ; elles définissent donc une transformation géométrique. A toute courbe (C) décrite par m correspond une courbe (c). Nous dirons que la transformation conserve les angles si à deux courbes quelconques (c) et (c_1) de la première figure, correspondent deux autres courbes (C) et (C_1) se coupant sous le même angle que les deux premières. La conservation sera directe ou inverse suivant que le sens de rotation



pour passer de (C) à (C_1) sera ou non le même que pour passer de (c) à (c_1)

Si X et Y définissent une fonction analytique, elles donnent lieu à une transformation avec conservation directe des angles. Cela tient à ce que l'angle des parallèles ot, oT aux tangentes en m et M à (c) et (C) représente précisément l'argument de la dérivée de la fonction analytique. Cet argument étant invariable, les parallèles ot_1, oT_1 aux tangentes en m et M à (c_1) et (C_1) donneront $t_1oT_1 = toT$ une même rotation amènera par suite ot_1 sur ot, oT_1 sur oT.

Proposons-nous maintenant de chercher toutes les transformations capables de conserver les angles.

Remarquons d'abord que si la conservation est directe pour les fonctions X, Y, elle devient inverse pour les fonctions $X, -Y$, car les deux courbes (C), (C') qui correspondent à une même courbe (c) sont symétriques par rapport à une droite fixe. On peut donc se contenter de chercher tous les systèmes de fonctions qui conservent directement les angles, on aura les autres en changeant le signe de Y.

Par hypothèse $T_1oT = t_1ot$; donc $t_1oT_1 = toT$, et cela constamment quand on tourne autour de m.

Or, on a:
$$\operatorname{tg} xoT = \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + y'\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \qquad \operatorname{tg} xot = y'$$

d'où:
$$\operatorname{tg} toT = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + y'^2\frac{\partial\psi}{\partial y}}$$

expression qui doit être indépendante de y', ce qu'expriment les relations

$$(1) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

$$(3) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

L'élimination de $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ entre (1) (2) (3) conduit à:

$$(1+\lambda^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

ou
$$(2') \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
si on observe que $\lambda^2 + 1 = 0$ n'a pas de sens puisque le rapport $\frac{\partial \psi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est réel. La comparaison de (2') avec (1) et (3) donne :
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Ce sont les conditions pour que la fonction $X + iY$ soit analytique. Avec la conservation inverse, on trouverait les conditions pour que $X - iY$ soit analytique.

Le mode général de transformation étudié précédemment porte le nom de représentation conforme.

Appliquons ce qui précède à la fonction $\frac{k^2}{z}$. Elle est nécessairement analytique, car le raisonnement qui établit l'existence de la dérivée de $\frac{k}{x}^2$ s'applique ici sans modification. Or, on a :
$$\frac{K^2}{z} = \frac{K^2}{x + iy} = \frac{K^2(x - iy)}{x^2 + y^2}$$
d'où
$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \quad Y = + \frac{K^2 y}{x^2 + y^2} \quad (u = X - iY)$$

La transformation ainsi définie conserve donc les angles, mais avec renversement du sens de rotation ; or des dernières équations on tire
$$X^2 + Y^2 = \frac{K^4}{x^2 + y^2} \qquad Xy \; Yx = 0$$
c'est-à-dire qu'on retrouve ainsi la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Soit encore la fonction z^2 qui est à priori, analytique.

On a,
$$X = x^2 - y^2 \quad Y = 2xy$$
et la transformation ainsi définie a lieu avec conservation directe des angles.

Voici une autre application importante :

V – Systèmes orthogonaux et isothermes.

– Si les coordonnées d'un point d'un plan sont définies par deux équations de la forme :
$$x = \varphi(u, v) \quad y = \varphi(u, v)$$
<u>u</u> et <u>v</u> sont dites les coordonnées curvilignes de ce point ; les courbes $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ forment deux familles de courbes qu'on appelle lignes coordonnées.

Le déplacement infiniment petit ds d'un point est donné par une relation de la forme :
$$ds^2 = A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2.$$

Cherchons tous les systèmes orthogonaux et isothermes de coordonnées curvilignes c'est-à-dire tous les systèmes tels que l'on ait

$$B = 0 \qquad A = c.$$

Dans ce cas, on a identiquement

$$dx^2 + dy^2 = A\,(du^2 + dv^2)$$

d'où en supposant u et v exprimés en fonction de x et de y:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{A} \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{A} \qquad (3)$$

Les relations (1)(2)(3) déterminent u, v et A.

Si l'on pose $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial v}{\partial y}$

on a, à cause de (1) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$

Éliminons $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, A entre (2)(3)(4), on a la condition

$$(\lambda^2 - 1)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \qquad (5)$$

u et v étant des fonctions réelles, on ne peut annuler le deuxième facteur de (5) qu'en posant, soit $\lambda = 0$ $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, soit $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Dans le premier cas, on a aussi $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$: u et v ne dépendent que de y c'est-à-dire ne sont pas indépendantes. Dans le second cas, la fonction v se réduit à une constante, et nous supposons u, v essentiellement variables: On doit donc annuler $\lambda^2 - 1$:
$\lambda = 1$, $\lambda = -1$ indiquent à cause des relations (4) que $u + iv$ ou $u - iv$ doit être une fonction analytique de z.

La condition nécessaire et suffisante pour que les coordonnées u et v forment un système orthogonal et isotherme est donc que l'une des fonctions $u + iv$, $u - iv$, soit analytique.

Remarquons que A est donné par

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{A}.$$

ds^2 est dès lors complètement déterminé.

Exemples. — A la fonction analytique z^2 correspond le système orthogonal et isotherme $x^2 - y^2 = C^{te}$, $xy = C^{te}$ formé d'hyperboles équilatères concentriques. A la fonction analytique $\frac{1}{z}$ correspond le système orthogonal et

et isotherme $\frac{x}{x^2+y^2} = C^{te}$; $\frac{y}{x^2+y^2} = C^{te}$

formé de cercles tangents à Ox et à Oy au point O.

VI. — Observons qu'on peut mettre sous d'autres formes les équations fondamentales (A) Soient, par exemple, R et Θ le module et l'argument de la fonction, en sorte que l'on ait

$$u = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

en faisant varier séparément x et y on a deux expressions de la dérivée, savoir:

$$f'(z) = \frac{\partial R}{\partial x}(\cos\Theta + i\sin\Theta) + R(i\cos\Theta - \sin\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \left(\frac{\partial R}{\partial x} + iR\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

$$if'(z) = \frac{\partial R}{\partial y}(\cos\Theta + i\sin\Theta) + R(i\cos\Theta - \sin\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} + iR\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

d'où en égalant:

$$(B) \quad \frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial\Theta}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

équations équivalentes aux équations (A); — on voit en même temps quelle est la forme qu'il convient de donner à la dérivée, enfin on en déduit immédiatement:

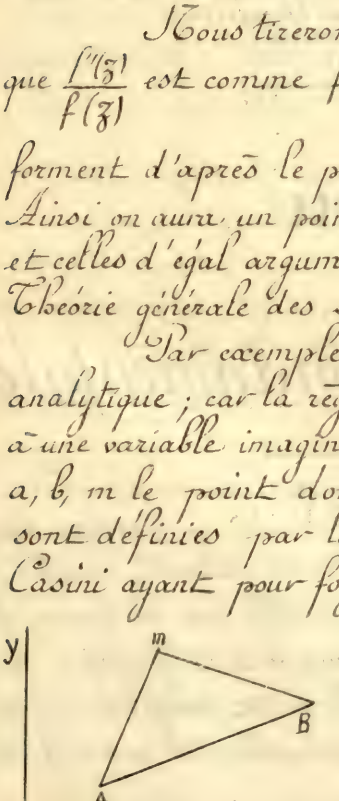
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial \mathrm{L} R}{\partial x} + i\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

Nous tirerons de cette relation la conséquence suivante: il est bien clair que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est comme $f(z)$ une fonction analytique, donc les courbes

$$R = \text{const} \qquad \Theta = \text{const}$$

forment d'après le paragraphe précédent, un système orthogonal et isotherme. Ainsi on aura un point système de courbes en considérant les courbes d'égal module et celles d'égal argument pour une fonction analytique quelconque. (Voir Darboux Théorie générale des surfaces — Tome I — page 162).

Par exemple soit $f(Z) = (Z-a)(z-b)$; c'est évidemment là une fonction analytique; car la règle élémentaire de dérivation d'un polynôme entier s'applique à une variable imaginaire. — Or soit A, B, les deux points dont les affixes sont a, b, m le point dont l'affixe est z. Les courbes d'égal module de la fonction sont définies par la condition $mA \cdot mB = \text{const}$; ce sont donc des ellipses de Casini ayant pour foyers AB. — D'ailleurs l'argument de $f(z)$ est la somme des angles que font avec OX les deux segments Am, Bm. Si on égale à une constante la tangente de cet argument, on aura en désignant par $a, b, a'\, b'$ les coordonnées de A, B:



$$\frac{\dfrac{y-b}{x-a} + \dfrac{y-b'}{x-a'}}{1 \quad \dfrac{(y-b)(y-b')}{(x-a)(x-a')}} = \text{const.}$$

ce sont des hyperboles équilatères admettant AB pour diamètre ; ces hyperboles et les ellipses de Casini forment donc un double système orthogonal et isotherme.

VII. – Différentielle. – Nous nommerons différentielle le produit de la dérivée par l'accroissement h donné à la variable et nous représenterons cette différentielle par dy · on aura donc

$$dy = f'(z).\,h$$

Dans le cas particulier où $f(z) = z$, $h = dz$ et nous écrirons $dy = f'(z)\,dz$.

La différentielle est la partie principale de $f(z+h) - f(z)$, c'est-à-dire que la partie complémentaire de l'accroissement serait infiniment petite par rapport à la différentielle. (β est dit infiniment petit par rapport à α quand le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ a pour limite 0).

Pour que la fonction $f(z)$ reste constante dans une aire donnée il faut et il suffit que sa différentielle y soit identiquement nulle, ou, ce qui revient au même, puisque dz est arbitraire, il faut et il suffit que $f'(z) \equiv 0$. On le voit immédiatement en remarquant que la condition $f'(z) = 0$ s'exprime, dans le cas des fonctions analytiques par les équations :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

qui expriment évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que X et Y soient l'une et l'autre des constantes dans l'aire donnée.

Deuxième Leçon.

Définition des fonctions simples fondamentales.

I. – Fonctions holomorphes. Points singuliers. – Lorsque dans une aire donnée (C) une fonction u sera susceptible d'une valeur unique, quel que soit le chemin qui conduise à ce point, on dira qu'elle est uniforme dans cette aire ; si elle est constamment uniforme, finie, continue et analytique, nous dirons qu'elle est holomorphe dans l'aire (C). On appelle point singulier un point tel que, pour l'affixe de ce point, une des conditions précédentes cesse d'être satisfaite. Faisons d'abord les remarques suivantes :

1°. – Si u et v sont holomorphes dans l'aire (C), il en est de même de $au + bv$, uv, a et b étant des constantes imaginaires. Les différentielles s'obtiennent

comme dans le cas des variables réelles et on a :

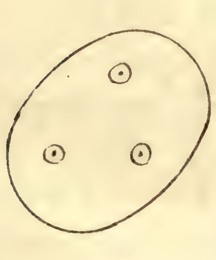
$$\Delta'(au+bv) = a\,\Delta u + b\,\Delta v \quad d'où \quad d(au+bv) = adu + bdv$$

$$\Delta\,(uv) = u\,d\Delta + v\,\Delta u \quad d'où \quad d(uv) = udv + vdu$$

2°,, – Si u est une fonction de z, holomorphe dans le champ (C) et que les valeurs correspondantes de cette fonction u restent comprises dans une aire pour laquelle la fonction f soit holomorphe, $f(u)$ sera une fonction v de z, holomorphe dans l'aire (C) et on aura, comme dans le cas des variables réelles

$$\Delta = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \Delta u \quad d'où \quad dv = f'(u)du$$

3°,, – Le rapport $\frac{u}{v}$ de deux fonctions holomorphes n'est pas holomorphe ; supposons que a soit une valeur de z qui annule v sans annuler u ; en se plaçant assez près du point a, le module de u restera supérieur à un nombre fixe et celui de v s'abaissera au-dessous de toute quantité donnée, v étant continu : donc $\frac{u}{v}$ devient infini au point a ; l'inverse $\frac{v}{u}$ est holomorphe au point a. Un pareil point singulier s'appelle un pôle de la fonction $\frac{u}{v}$. La fonction $\frac{u}{v}$ n'aura d'autres points singuliers que des pôles dans (C). Si autour de chacun d'eux on enlève du plan une aire fermée, de dimensions aussi petites qu'on voudra, on formera une aire à plusieurs contours dans laquelle la fonction sera holomorphe. Cela est analogue au procédé employé dans le cas des variables réelles, lorsqu'on supprime de l'intervalle dans lequel elle se meut une petite portion $a-\varepsilon, a+\varepsilon$ entourant une valeur critique de la variable. Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une aire donnée, sauf en de certains points isolés qui sont des pôles, on dit que la fonction est méromorphe dans l'aire (C). Il résulte de ce qui précède qu'un polynôme entier est une fonction holomorphe et qu'une fraction rationnelle est méromorphe et cela dans le plan tout entier. Nous acquerrons dans cette même leçon la notion de points singuliers tout-à-fait différents des pôles. Pour le moment, nous allons définir d'une façon précise les autres fonctions simples que nous connaissons dans le cas des variables réelles.



II. Fonction exponentielle.

– Proposons-nous par analogie avec e^x, de déterminer une fonction holomorphe dans tout le plan et satisfaisant pour toutes les valeurs de z et de z' à l'équation.

$$(1) \qquad f(z+z') = f(z)\,f(z')$$

Si nous faisons $z'=0$, nous avons d'abord $f(0)=1$. Comme d'ailleurs $f(z)$ doit être holomorphe aux environs de 0, nous avons aussi, h tendant

vers zéro :

$$\text{Lim}\ \frac{f(h)-1}{h} = f'(0)$$

et l'équation (1) nous donne

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f(z)\,\frac{f(h)-1}{h}$$

On en déduit, en passant à la limite,

$$f'(z) = f(z)\cdot f'(0)$$

Donc la fonction cherchée doit se reproduire par la dérivation au facteur constant près $f'(0)$. Pour que cette fonction coïncide avec la fonction e^x pour les valeurs réelles de z, il faudra supposer $f'(0)=1$, d'où enfin

$$f(z) = f'(z)$$

Ceci posé, soient R et Θ le module et l'argument de $f(z)$ nous aurons comme on l'a vu

$$f(z) = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

$$f'(z) = \left(\frac{\partial R}{\partial x} + iR\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)(\cos\Theta + i\sin\Theta),$$

et en égalant les seconds membres,

$$(2)\qquad \frac{\partial R}{\partial x} = R \qquad\qquad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$$

Les conditions pour que la fonction soit analytique, sont d'ailleurs

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Theta}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

On aura donc en définitive,

$$(3)\quad \frac{\partial R}{\partial x} = R,\ \ \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial R}{\partial y} = 0,\ \ \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 1$$

et, pour $x=0$ $y=0$,

$$(4)\qquad R = 1 \qquad \Theta = 2K\pi$$

Ces conditions déterminent R et Θ.

$$\begin{cases}\Theta = y + 2K\pi\\ R = e^x\end{cases}$$

et on a, en définitive,

$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Nous représenterons cette fonction par le symbole e^z. ses propriétés fondamentales sont exprimées par les relations :

$$(5)\qquad e^z = e^x(\cos y + \sin y)$$

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \qquad e^0 = 1 \qquad e^{z+z'} = e^z e^{z'} \qquad e^z\cdot e^{-z} = 1$$

Toutes les propriétés de e^x se démontrent par un calcul analogue pour e^z, mais il en est une qui sera nouvelle pour nous : c'est la périodicité. e^z se reproduit quand y augmente de $2K\pi$, c'est-à-dire quand z augmente de $2iK\pi$.

Nous exprimerons ce fait en disant que e^z admet la période $2i\pi$. Elle n'en admet aucune autre, car toute période ω se détermine par l'identité.

$$e^{z+\omega} = e^z \qquad \text{ou} \qquad e^\omega = 1$$

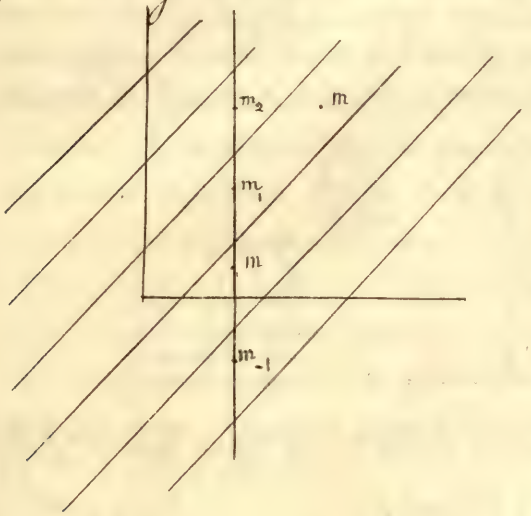
Or si l'on a $\omega = \alpha + i\beta$, cette égalité entraîne

$$e^\alpha = 1 \qquad \beta = 2K\pi$$

d'où

$$\omega = 2iK\pi$$

La périodicité se représente géométriquement de la manière suivante. Divisons le plan en bandes par des droites parallèles, dont la direction diffère de Oy et dont la distance complétée parallèlement à Oy soit 2π. A chaque point m d'une bande correspondent d'autres points $m_{-1}, m_{-2}, \ldots, m_1, m_2 \ldots$ situés dans les autres et qui occupent sur une même parallèle à Oy une situation identique. Inversement tout point du plan donné peut être ramené à un point de la première bande par l'adjonction d'une multiple convenable de $2i\pi$. La périodicité exprime que la fonction e^z prend la même valeur pour tous les points analogues ainsi déterminés. Il suffit donc de l'étudier dans la première bande pour la connaître dans le plan tout entier.



e^z est holomorphe dans tout le plan et ne s'annule jamais, car son module e^x ne s'annule pour aucune valeur finie de x. D'ailleurs, en dehors de zéro, e^z prend une fois et une seule dans chaque bande toute valeur assignée d'avance car l'égalité

$$e^z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

équivaut aux suivantes $e^x = \rho$, $y = \theta + 2K\pi$, qui déterminent dans chaque bande un point et un seul ayant pour affixe

$$z = L\,r + i(\theta + 2K\pi).$$

III. Fonctions $\cos z$, $\sin z$, $tg\, z$.

— L'équation (5) donne pour $x = 0$

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

On en déduit d'abord qu'une imaginaire de module r et d'argument θ peut être représentée par $re^{i\theta}$. On a ensuite.

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad \operatorname{tang} y = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{-iy}}$$

et les fonctions de variables réelles $\cos y$, $\sin y$, $tg\, y$ se trouvent exprimées à l'aide d'une fonction de variable imaginaire. Il est évident que toutes les propriétés de ces fonctions circulaires pourraient se déduire des formules précédentes en faisant usage des propriétés établies plus haut, de l'exponentielle e^z. Or, si nous considérons les fonctions parfaitement définies

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}, \qquad \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},$$

elles sont analytiques dans tout le plan et les calculs dont nous venons de parler s'y appliquent sans modification. Nous les prendrons pour définition des fonctions circulaires directes et nous poserons

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad tg\, z = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$

Nous aurons ainsi, sans qu'il soit besoin de les démontrer, les résultats suivants:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0 \qquad tg\, 0 = 0$$

$$\cos(-z) = +\cos z \qquad \sin(-z) = -\sin z \qquad tg(-z) = -tg\, z$$

$$\frac{d\cos z}{dz} = -\sin z \qquad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z \qquad \frac{d\, tg\, z}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \qquad \sin(z+z') = \sin z \cos z' + \sin z' \cos z \qquad tg(z+z') = \frac{tg z + tg z'}{1 + tg z\, tg z'}$$

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \qquad \sin(z+2\pi) = \sin z \qquad tg(z+2\pi) = tg\, z$$

$$\cos(z+\pi) = -\cos z \qquad \sin(z+\pi) = \sin z \qquad tg(z+\pi) = tg\, z$$

Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ admettent pour période 2π, il suffit de les étudier dans une bande dont l'amplitude parallèlement à Ox est 2π. Elles sont holomorphes dans tout le plan et prennent deux fois dans chaque bande une valeur quelconque A assignée d'avance. En effet si on prend pour inconnue e^{zi} ou u, on a à résoudre l'équation du second degré

$$u + \frac{1}{u} = 2A,$$

qui a des racines différentes de zéro: donc u prend une fois et une seule dans chaque bande [1] la valeur de chaque racine. Comme le produit des racines est égal à 1 les valeurs correspondantes de z ont une somme égale à $2k\pi$, k étant un nombre entier. Les zéros de $\cos z$ sont donnés par la formule $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ceux de $\sin z$ par $\underline{K}$ $z = r\pi$.

---

[1] Quand z reste dans une bande d'amplitude $2i\pi$, zi reste dans une bande d'amplitude 2π.

La fonction $\operatorname{tg} z$ est méromorphe dans tout le plan : elle admet comme pôles les zéros de $\sin z$. Sa période est π et la largeur des bandes est diminuée de moitié. Les points du plan où elle prend une valeur A sont donnés par

$$i\left(u - \frac{1}{u}\right) = A\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

$$u^2(A - i) + A + i = 0$$

ou

$$e^{2zi} = \frac{i + A}{i - A},$$

ce qui donne un point et un seul dans chaque bande.

IV. Irrationnelles.

– Il y a lieu de considérer les fonctions inverses de celles que nous venons de définir. L'égalité $z = f(u)$ définit u comme fonction de z ; on l'appelle fonction inverse de $f(z)$. Nous établirons plus tard à quelles conditions cette fonction existe et nous démontrerons son existence dans les cas particuliers que nous allons étudier ; d'ailleurs en admettant l'existence de la fonction inverse et en supposant $f(z)$ analytique dans les environs d'un point donné, on aura, comme pour les variables réelles,

$$\frac{\Delta f(u)}{\Delta u} = \frac{\Delta z}{\Delta u} \quad \text{d'où} \quad \frac{du}{dz} = \frac{1}{f'(u)}$$

La fonction inverse est donc analytique.

Considérons la fonction u inverse de z^2 :

$$u^2 = z$$

Si l'on pose

$$z = r e^{\theta i}, \text{ on a}$$

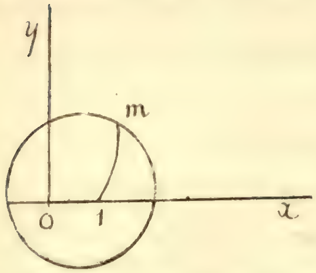
$$u = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta + 2K\pi}{2} + i \sin\frac{\theta + 2K\pi}{2}\right),$$

et, en donnant à K les valeurs 0 et 1,

$$u_0 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

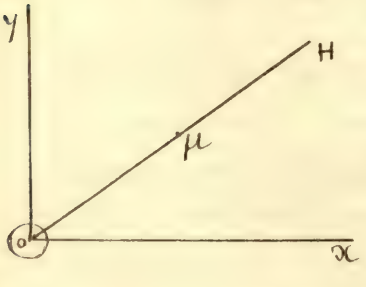
$$u_1 = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] = -u_0$$

Chacune de ces déterminations est finie, continue et analytique dans tout le plan. Elles sont représentées par des points symétriques par rapport à l'origine. Supposons que z parte d'un point déterminé du plan, le point 1 par exemple et suive un chemin continu quelconque aboutissant au point m sans passer par l'origine. Attachons-nous à suivre la détermination u_0 : elle a au début la valeur $+1$ et la continuité nous donnera sans ambiguïté la valeur de la fonction au point m. Cette valeur est, dans ces conditions, bien déterminée, mais elle dépend du chemin suivi. Si, en effet, m décrit une courbe fermée n'entourant pas l'origine, quand on sera revenu au point m le module et l'argument auront repris la même valeur. M_0 décrit donc une courbe fermée. Il n'en est pas ainsi si le chemin de m entoure



l'origine : quand m sera revenu au point de départ, θ aura varié d'un multiple entier de 2π et l'argument de M_0 de $K\pi$. Si K est pair, la courbe décrite vient se terminer à son point de départ M_0 ; si K est impair, on aboutit au point symétrique M_1. La fonction peut donc prendre au point m, suivant le chemin considéré deux valeurs et n'est pas uniforme.

L'origine joue donc un rôle considérable dans la détermination de la fonction c'est d'ailleurs un point singulier. Si, en effet, on suit, à partir du point 1, un chemin qui passe par l'origine, la continuité donnera en chaque point la valeur de u, tant qu'on n'aura pas atteint le point 0. Quand on sera en 0, comme aux environs de ce point les deux valeurs sont infiniment petites, on pourra adopter l'une aussi bien que l'autre. En d'autres termes les deux branches représentatives de la fonction u passent par l'origine : on peut passer du point 0 sur l'une quelconque des deux sans violer la continuité. L'origine est un point d'incomplète détermination. Si nous supprimons du plan une aire de dimensions aussi petites qu'on voudra entourant le point 0 le chemin décrit par la variable ne pourra plus passer par ce point critique et la fonction aura alors en chaque point du plan, une valeur déterminée (pour un chemin donné), elle sera finie, continue mais ne sera pas uniforme. Les déterminations u_0 et u_1 doivent être considérées, non comme deux fonctions distinctes mais comme deux branches d'une fonction unique : c'est le premier exemple d'une fonction multiforme. On peut d'ailleurs bien aisément isoler l'une de l'autre les deux déterminations de la fonction, il suffit de mener à partir du point 0 une ligne arbitraire OH s'étendant à l'infini, et de restreindre le champ de la variable z à l'ensemble des chemins qui ne rencontrent pas OH. Dans ce champ restreint, l'équation $u^2 = z$ définit deux fonctions qui restent distinctes l'une de l'autre ; chacune de ces deux fonctions est alors uniforme et par suite holomorphe. — La ligne OH s'appellera une coupure.



Remarque. — La dérivée est donnée par la relation $u' = \frac{1}{2u}$, ce qui la détermine sans ambiguïté.

On est conduit à des résultats analogues si on étudie la fonction inverse de z^p, définie par l'égalité :

$$u^p = z$$

On a

$$u_k = r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2K\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2K\pi}{p}\right)$$

et si on donne à K les valeurs 0, 1, 2 ...... p-1, on obtient les m déterminations de la fonction. Les p points $M_0, M_1, \ldots M_{p-1}$ qui correspondent à une même valeur de z d'affixe m forment un polygone régulier de centre O. Si l'affixe de z décrit une courbe fermée (C) qui part de m et y revient, et si au début on se place au point M_0, on aboutira en ce même point si (C) n'entoure pas l'origine : sinon le chemin de la fonction ira de M_0 à un autre sommet du polygone. Si (C) passe par l'origine, les m valeurs de u s'annulent en même temps et quand m dépassera O la continuité ne nous indiquera plus sur quelle branche nous devons nous diriger : l'origine est un point critique algébrique. L'équation définit en résumé une fonction finie continue et analytique, mais multiforme et ayant K valeurs distinctes en chaque point du plan. — On isolera les différentes déterminations et chacune d'elles deviendra uniforme, si on supprime les environs de l'origine et qu'on pratique comme précédemment une coupure OH.

En raisonnant de même sur l'équation

$$u^2 = (z-a)(z-b)$$

on verra qu'elle définit une fonction ayant deux points singuliers d'embranchement a, b. Si on supprime du plan deux régions infiniment petites autour de ces deux points, la fonction prendra en chaque point une valeur déterminée pour un chemin donné suivi par la variable ; deux chemins ayant mêmes points de départ et d'arrivée conduiront à une même valeur de la fonction, si ces deux chemins tournent l'un et l'autre un nombre pair de fois, ou tous deux un nombre impair de fois autour d'un point critique ; — au contraire ils conduiront à deux valeurs de la fonction, égales et de signes contraires, s'ils entourent l'un un nombre pair, l'autre un nombre impair de points critiques. — La fonction n'est pas uniforme ; en rejoignant les points a, b par une ligne, que le chemin de la variable sera assujetti à ne jamais rencontrer, on séparera les deux déterminations, dont chacune sera alors uniforme.

La dérivée de la fonction serait d'ailleurs donnée par la relation :

$$u' = \frac{2z-a-b}{2u}$$

V Logarithme. — La fonction logarithmique

$$u = L\,z$$

sera définie par l'équation

$$e^u = z.$$

Soient r et θ le module et l'argument de z, u a pour expression

$$u = L\,r + \theta i.$$

θ étant susceptible d'une infinité de valeurs, u aura une infinité de valeurs représentées par des points situés sur une parallèle à Oy distants de 2π. On passe de l'une à une autre pour une même valeur de z d'affixe m lorsque θ augmente d'un multiple de 2π, c'est-à-dire lorsque m décrit un chemin qui entoure l'origine pour revenir à sa position initiale. L'ensemble de ces valeurs correspondantes à chaque point du plan forme donc des branches d'une même fonction multiforme pouvant prendre en chaque point une infinité de valeurs. Sa dérivée est donnée par la formule

$$u' = \frac{1}{z},$$

elle est donc uniforme. Si la variable s'avance jusqu'à l'origine, toutes les valeurs deviennent infinies, ce point est un point singulier. Si près que l'on soit de ce point, la fonction a une infinité de valeurs situées sur une parallèle à Oy qui s'éloigne indéfiniment: l'origine est donc un point singulier qui n'est ni un pôle, ni un point critique algébrique; On devra interdire à la variable l'accès d'une région aussi petite qu'on voudra, autour de ce point. — Si en outre on fait dans ce plan une coupure de forme quelconque s'étendant à l'infini, à partir du point O, on aura, non pas une fonction multiforme, mais une infinité de fonctions distinctes, dont chacune sera uniforme.

VI. Arc tg z. — Comme exemple de fonctions circulaires inverses il sera bon d'étudier de la même manière l'arc-tangente u donné par

$$\operatorname{tg} u = z \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{e^{ui} + e^{-ui}} = iz$$

On en tire

$$e^{2ui} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$u = \frac{1}{2i} L(i-z) - \frac{1}{2i} L(i+z)$$

C'est une fonction analogue au logarithme. Elle a deux points singuliers transcendants sur Oy, i et $-i$. En les enlevant et en les réunissant par une coupure, on rend la fonction uniforme. La dérivée de la fonction est d'ailleurs uniforme

$$u' = \frac{1}{1+z^2}.$$

VI. — Domaine d'un point — Valeur infinie de la variable.

On appelle domaine d'un point M l'ensemble des valeurs de z qui correspondent aux points contenus à l'intérieur d'une aire de forme et de dimensions indéterminées, entourant le point M_0, et supposée assez petite pour que la fonction satisfasse en tous ces points à de certaines conditions qui sont vérifiées au point M_0. — Par exemple dire qu'une fonction est continue dans le domaine

de M_0 (ou de z_0), c'est dire qu'elle est continue en M_0 et que de plus on peut trouver un contour de dimensions finies, mais aussi petit ailleurs qu'on voudra, entourant M_0 et dans lequel la fonction reste continue.

A ce point de vue le domaine de l'Infini est l'ensemble des valeurs de z dont le module est supérieur à un nombre fixe R à la condition que R puisse être supposé plus grand que tout nombre donné ; Si on pose $z = \frac{1}{\zeta}$, lorsque l'image M de z restera extérieure à un cercle de rayon R ayant O pour centre, l'image p de ζ restera intérieure à un cercle de rayon $\frac{1}{R}$ ayant aussi le point O pour centre ; le domaine de l'infini pour z correspond donc au domaine de l'origine pour ζ ; nous considérerons alors l'infini comme une valeur particulière bien déterminée, attribuée à la variable et nous dirons que pour $z = \infty$ $f(z)$ présente une certaine propriété, lorsque cette propriété appartiendra à $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ dans le domaine de $\zeta = 0$.

L'étude d'une fonction à l'infini et nécessaire pour que la fonction soit complètement connue. – Nous indiquerons rapidement cette étude pour les fonctions les plus simples.

1°. – Polynôme entier. – Si on pose

$$f(z) = A_0 \quad + A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-2} \qquad + A_{p-1} z + A_p$$

Si on pose

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 \qquad + A_p \zeta^p}{\zeta^p}$$

On voit que le point à l'infini est un pôle d'ordre $p-q$, q étant l'indice du 1er coefficient $A_0 A_1$ qui ne s'annule pas ; donc $f(z)$ est méromorphe pour toutes les valeurs de z, avec un seul pôle $z = \infty$.

2°. – Fraction rationnelle. – Soit

$$f(z) = \frac{A_0 z^p + A_1 z^{p-1} \qquad + A_{p-1} z + A_p}{B_0 z^q + B_1 z^{q-1} \qquad + B_q}$$

On en déduira :

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \zeta^{p-q} \frac{A_0 + A_1 \zeta \qquad + A_p \zeta^p}{B_0 + B_1 \zeta \qquad + B_q \zeta^q}$$

Donc, l'infini est un point ordinaire si $p \geq q$; c'est un pole si $p < q$. On en conclut que $f(z)$ est méromorphe pour toutes les valeurs finies ou infinies de z.

3°. – Considérons e^z. – L'infini est ici un point singulier ; si a désigne une imaginaire donnée l'équation $e^z = a$ a une infinité de racines, et il y a un nombre infini de ces racines qui sont extérieures à un cercle de rayon R, quelque grand que soit R. – Donc, dans les environs du point ∞, e^z est absolument indéterminée, puisqu'elle prend autant de fois qu'on veut n'importe qu'elle valeur donnée d'avance. – Ce point à l'infini est donc très-différent d'un pôle ; nous

y reviendrons plus tard ; c'est ce qu'on appelle un point singulier essentiel. Il résulte de là que e^z est holomorphe pour toute valeur finie de z et admet l'∞ comme point singulier essentiel. — C'est là ce qui distingue e^z d'un polynôme entier pour lequel le point ∞ serait un pôle.

Troisième Leçon.

Extension du calcul différentiel et intégral aux fonctions de variables imaginaires.

I Fonctions de plusieurs variables.

— Considérons n quantités imaginaires $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$, représentées pour plus de clarté dans les plans différents et respectivement variables dans des aires (C_1) (C_2) - - - - (C_n).

Posons, en général,

$$z_j = x_j + i y_j ,$$

et soient X et Y deux fonctions données des $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n$.
L'imaginaire

$$u = X + i Y$$

sera une fonction de $z_1, z_2, \ldots z_n$, définie dans le champ $(C_1)(C_2), \ldots\ldots (C_n)$ et cette dépendance s'exprime par l'égalité $u = f(z_1 z_2 \ldots z_n)$ La fonction sera déterminée, finie et continue si les deux fonctions X, Y présentent ces caractères relativement aux $2n$ variables dont elles dépendent.

Dérivées partielles. — Si, quand on ne fait varier que z_i, la fonction de z_i ainsi formée admet une dérivée continue, cette dérivée dans laquelle on rendrait aux autres variables leur liberté sera dite la dérivée partielle de n par rapport à z_i et se représentera par le symbole $\frac{\partial f}{\partial z_i}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} - \frac{\partial Y}{\partial y_i} = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial y_i} + \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0$$

Si ces conditions sont vérifiées par les n valeurs de i, la fonction admet n dérivées partielles continues : $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2} \ldots \frac{\partial f}{\partial z_n}$. Ce sera une fonction analytique de $z_1 z_2 \ldots z_n$. Elle sera holomorphe dans le champ $(C_1)(C_2)$ - - - - (C_n) si pour toutes les valeurs correspondantes des variables elle est uniforme, finie continue et analytique.

Différentielle totale. — $h_1 h_2 h_3 \dots h_n$ étant un système d'accroissements, nous appellerons différentielle totale l'expression

$$du = \frac{\partial f}{\partial z_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} h_2 + \quad + \frac{\partial f}{\partial z_n} h_n$$

d'où on déduit $dz_i = h_i$ et par suite

$$du = \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \quad + \frac{\partial f}{\partial z_u} dz_u$$

La propriété fondamentale consiste en ce qu'on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que u se réduise à une constante dans le champ donné, en écrivant que $du = 0$ quels que soient $dz_1\, dz_2 \dots dz_n$. Il est aisé de le démontrer; d'abord cette condition est évidemment nécessaire; si maintenant on la suppose remplie, on aura pour $i = 1, 2 \quad u$:

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial X}{\partial x_i} + i\frac{\partial Y}{\partial x} = i\frac{\partial X}{\partial y_i} + \frac{\partial Y}{\partial y_i} = 0$$

on en conclut $\frac{\partial X}{\partial x_i} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y_i} = \frac{\partial Y}{\partial y_i} = 0$. Les fonctions X, Y sont donc, l'une et l'autre, indépendante de toutes les variables x_i, y_i; elle se réduisent donc à deux constantes dans le champ donné.

II. Fonctions composées.

— Supposons que les variables $z_1, z_2 \dots z_n$ soient elles-mêmes fonctions de $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_p$ et restent dans le champ $(C_1)(C_2) \dots (C_n)$ quand ces dernières variables resteront dans un champ $(K_1)(K_2) \dots (K_p)$, la fonction composée f étant fonction analytique des fonctions composantes z_1, $z_2, \dots z_n$ et celles-ci étant fonctions analytiques de $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_p$. Posons d'une manière générale

$$\zeta = \xi + i\eta$$

ζ, ξ et η étant affectés successivement des indices $0, 1, 2, \dots n$. Si les dérivées partielles de f existent, elles sont de la forme:

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{\partial X}{\partial \xi} + i\frac{\partial Y}{\partial \xi}.$$

Or on a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \dots\dots + \frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial X}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \dots\dots + \frac{\partial Y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial Y}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial \xi}$$

Si on tient compte de ce que f est fonction analytique de $z_1, z_2 \dots z_n$, on a

$$\frac{\partial X}{\partial x_1} + i\frac{\partial Y}{\partial x_1} + i\frac{\partial Y}{\partial y_1} - i\frac{\partial X}{\partial y_1} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y_1} + i\frac{\partial Y}{\partial y_1}\right)$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

et les relations (2) donnent

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + i\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial \xi} + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\frac{\partial z}{\partial \xi} + i\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\frac{\partial y_n}{\partial \xi}\right)$$

Mais on peut écrire

$$\frac{\partial z_k}{\partial Z} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} + i\,\frac{\partial y_k}{\partial \xi}$$

On a donc enfin

$$(3)\quad \frac{\partial X}{\partial \xi} + i\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial z}{\partial \zeta} + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\cdot\frac{\partial z_n}{\partial \zeta}$$

On arriverait évidemment à la même expression en calculant la quantité

$$(4)\quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} - i\frac{\partial X}{\partial \eta}$$

Or nous avons vu qu'on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction soit analytique en égalant les expressions (3) et (4). f est donc fonction analytique de $\zeta_1, \zeta_2 \dots z_p$ et la forme générale de ses dérivées partielles est donnée par la formule (3).

D'après cela, la différentielle totale <u>du</u> a exactement la même forme, que les z soient les variables indépendantes, ou soient des fonctons composantes; ce théorème et celui qui fournit les conditions pour que u reste constante dans une aire donnée entraînent comme conséquences toutes les propositions et tous les procédés de calcul différentiel que nous avons donnés, dans le cas des variables réelles; et qui se trouvent ainsi étendus aux cas de fonctions analytiques de variables complexes.

Toute la partie du calcul intégral qui se rapporte à l'Intégration indéfinie se trouve généralisée du même coup, car les résultats auxquels conduit la recherche des fonctions primitives se vérifieraient par des calculs de dérivation qui restent les mêmes, que les variables soient réelles ou imaginaires.

III._ Fonctions implicites.

Le déterminant d'un système de fontions se définit comme dans le cas des variables réelles et toutes les particularités qui s'y rattachent subsistent en raison des généralisations qui précédent.

Passons aux fonctions implicites : soit

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(u_1, u_2, \dots\dots u_p, z_1, z_2, \dots\dots z_n) = 0 \\ f_2(u_1, u_2, \dots\dots u_p, z_1, z_2, \dots\dots z_n) = 0 \\ \text{-------------------} \\ f_p(u_1, u_2, \dots\dots u_p, z_1, z_2, \dots\dots z_n) = 0 \end{cases}$$

un système de p équations entre les $n+p$ variables $u_1, u_2, \dots u_p, z_1, z_2, \dots z_n$; nous supposons que les fonctions $f_1, f_2 \dots f_p$, sont des fonctions

holomorphes de ces variables dans un champ (C)

Soit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ un système de valeurs satisfaisant aux équations (1), contenues dans le champ (C) et n'annulant pas le déterminant

$$J = \frac{D(f_1, f_2, \ldots f_p)}{D(u_1, u_2, \ldots u_p)}$$

Ceci posé, nous démontrerons plus tard qu'il existe p fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ des n variables $z_1, z_2, \ldots z_n$ satisfont aux conditions suivantes:

1°. – Elles se réduisent respectivement à $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$, pour les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ données aux z

2°. – Elles sont holomorphes dans un champ (C') convenablement choisi et comprenant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

3°. – Pour toutes les valeurs de $z_1, z_2, \ldots z_n$ contenues dans le champ (C') les fonctions $f_1, f_2 \ldots f_p$ s'annulent identiquement quand on y remplace les u par les φ correspondants.

Les fonctions φ ainsi définies sont dites fonctions implicites. Leurs différentielles totales et leurs dérivées partielles se calculent évidemment comme pour les variables réelles. Il en est de même des fonctions inverses qui sont un cas particulier des précédentes.

Les généralisations qui précèdent sont encore limitées aux fonctions qui résultent d'un nombre fini d'opérations effectuées sur les fonctions qui servent d'éléments.

Il y a lieu maintenant d'étendre rapidement la théorie des séries aux cas où les termes seraient des quantités complexes.

IV. – Séries.

– Une série

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \qquad + u_n$$

où l'on a: $u_n = a_n + i b_n$ en désignant par a_n et b'_n deux constantes réelles données, est convergente lorsque la somme

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

tend vers une limite déterminée S n augmentant indéfiniment. Il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi que les séries

$$(2) \qquad a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots$$

$$(3) \qquad b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n + \ldots\ldots$$

soient convergentes. Si elles ont pour sommes A et B, on a

$$S = A + i B$$

Considérons la série formée par les modules des termes de la série (1)

$$(4) \qquad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_n + \ldots\ldots$$

Si elle est convergente, il en sera de même des séries

$$(5) \qquad |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

$$(6) \qquad |b_1| + |b_2| + |b_3| + \cdots + |b_n| + \cdots$$

dont les termes sont au plus égaux aux termes de même rangs de la série (4): les séries (2) et (3) sont donc absolument convergentes. La série proposée (1) est alors convergente et on peut de plus intervertir l'ordre de ses termes d'une manière quelconque sans altérer ni la convergence ni la somme de la série, l'interversion des termes étant entendue comme dans le cas des séries à termes réels (Voir 1ère Partie, page 46)

Si dans les cases d'un tableau à double entrée, on inscrit une double suite de quantités imaginaires $a_j^k + i\, b_j^k$, on forme une série à double entrée. Si les modules de ses termes forment une série double convergente, la série elle-même sera convergente et on pourra l'évaluer à l'aide d'une courbe de sommation arbitraire sans altérer ni la convergence ni la valeur de sa somme. Il suffit pour le voir de comparer à la série des modules les deux séries doubles formées par les quantités a_j^k, d'une part; b_j^k d'autre part. On en déduit par un raisonnement identique à celui que nous avons déjà fait (1ère Partie page 49), que le produit de deux séries linéaires absolument convergentes est fourni par la même règle que dans les cas des termes réels.

Théorème. – Si on multiplie les termes de la série (1) absolument convergente par des quantités imaginaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ de module fini, la série

$$(7) \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n + \cdots$$

est elle-même absolument convergente.

Puisque le module de α_n reste inférieur à un nombre fixe A, le module de $\alpha_n u_n$ est plus petit que $A\,|u_n|$; la série (7) est donc absolument convergente.

Convergence uniforme. – Supposons que les termes de la série (1) soient des fonctions d'une variable z mobile dans une aire donnée (C). Si à tout nombre ε on peut faire correspondre un nombre p tel que l'on ait, quel que soit z:

$$(8) \qquad |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de n égales ou supérieurs à p, la série sera uniformément convergente dans l'aire (C). Pour une telle série on a immédiatement le théorème suivant:

Théorème. – Lorsque les termes d'une série sont des fonctions de z, continues dans une aire C, dans laquelle la série converge uniformément, la somme de la série est elle-même une fonction continue.

En effet, z et $z+h$ étant deux valeurs contenues dans C, on aura

$$S(z+h) - S(z) = [S(z+h) - S_n(z+h)] + [S_n(z+h) - S_n(z)] + [S_n(z) - S(z)]$$

Or si on se donne un nombre positif ε on pourra d'abord déterminer n de telle sorte qu'on ait à la fois, quels que soient z et $z+h$:

$$|\rho(z+h)-\rho_n(z+h)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad |\rho_n(z)-\rho(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

n étant ainsi déterminé il existera un nombre η tel que $|\rho_n(z+h)-\rho_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$, puisque $\rho_n(z)$ est la somme d'un nombre déterminé de fonctions continues, lorsque $|h|<\eta$.

Dans ces conditions on aura, pour $|h|<\eta$:

$$|\rho(z+h)-\rho(z)|<\varepsilon$$

ce qui exprime la continuité de $\rho(z)$.

V. – **Séries entières.** – Nous laisserons de côté, pour le moment, ce qui concerne les séries en général et nous insisterons d'une façon particulière sur les séries de la forme:

$$(1) \qquad a_0+a_1z+a_2z^2+\dots \quad +a_nz^2+\dots$$

où $a_0, a_1 \quad a_n \dots$ sont des constantes.

Supposons que pour une certaine valeur Z la série (1) soit convergente; si z est de module moindre que Z la progression géométrique.

$$1+\frac{z}{Z}+\frac{z^2}{Z^2} \qquad +\frac{z^n}{Z^n}+$$

sera absolument convergente; si nous multiplions son termes général par $a_n Z^n$ qui reste fini puisqu'il a pour limite 0 nous formerons une série convergente; or nous reconstituerons ainsi la série (1); donc

Si la série (1) converge pour une certaine valeur de z, elle est absolument convergente pour toute valeur de module moindre.

Il est clair que la série converge pour $z=0$ puisqu'elle se réduit à a_0; il peut se présenter trois cas.

1°. – Ou bien la série est divergente, quel que soit z, sauf pour $z=0$. Telle est la série

$$1+z+4z^2 \qquad +n^nz^n+\dots$$

2°. – Ou bien elle converge pour toute valeur de z – C'est le cas de la série

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2} \qquad +\frac{z^n}{1.2.\ n}+\dots$$

car le rapport d'un terme au précédent tend vers 0 quand n croît indéfiniment d'où résulte que la série des modules est convergente

3°. – Ou bien enfin il y aura des valeurs autres que 0 pour lesquelles la série sera convergente, d'autres pour lesquelles elle sera divergente. Telle est la série

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}\dots \qquad +\frac{z^n}{n}+\dots$$

qui converge pour $z=-1$ et qui dit divergente pour $z=1$. Dans ce dernier cas, soit R le plus petit module des valeurs de z pour lesquelles la série cesse d'être convergente

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

Nous appellerons cercle de convergence un cercle c de rayon R décrit de l'origine comme centre ; cette dénomination est justifiée par le théorème suivant.

Théorème. – La série est convergente pour tout point situé à l'intérieur du cercle C ; elle est divergente pour tous les points situés à l'extérieur.

En effet de la définition même de R il résulte que la serie est convergente tant que z n'a pas atteint le module R, c'est à dire tant qu'on reste à l'intérieur de c ; d'autre part si pour une valeur Z extérieure à (C) la série était convergente elle le serait, d'après le théorème démontré plus haut, pour toute valeur de module moindre et par suite ne cesserait pas d'être convergente pour une valeur de module R.

On ne peut d'ailleurs rien affirmer en ce qui concerne la circonférence même du cercle ; il peut y avoir convergence tout le long de cette circonférence, comme il peut y avoir constamment divergence, ou convergence en de certains points, divergence en d'autres points.

Par exemple la série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} \quad\quad + \frac{z^n}{n} +$$

est convergente pour $Z = -1$ donc son rayon de convergence est au moins égal à 1 ; d'autre part elle est divergente pour $z = 1$ (série harmonique) donc son rayon ne peut dépasser I. Donc enfin la serie a pour rayon de convergence I.

Séries dérivées, séries intégrales. – Nous nommerons série dérivée la série

$$a_1 + 2a_2 z \quad\quad + (n+1)a_{n+1} z^n +$$

obtenue en remplaçant chaque terme par sa dérivée de même en remplacant $a_n z^n$ par $\frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ qui en est une fonction primitive on forme une série.

$$a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 \quad\quad + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} +$$

que nous appellerons serie intégrale. Ces deux séries sont convergentes dans le cercle (C) ; en effet soit z une valeur de module moindre que R ; Z une valeur de module intermédiaire les deux séries qui ont pour terme général

$$v_n = (n+1)\left(\frac{z}{Z}\right)^n \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{z}{Z}\right)^{n+1}$$

sont absolument convergentes car pour n infini on a

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{z}{Z} \quad\quad \lim \frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{z}{Z}$$

et $\left|\frac{z}{Z}\right| < 1$. Dès lors multiplions v_n $a_{n+1} Z^n$ qui tend évidemment vers 0 quand n augmente indéfiniment, nous aurons une série convergente qui évidemment ne sera autre que la série dérivée ; on reproduit de même la série intégrale en multipliant w_n par $a_n . Z^{n+1}$ qui tend également vers 0 ; donc cette série intégrale est convergente.

En raisonnant sur la série dérivée comme sur la serie elle-même on aura une nouvelle série dérivée et ainsi de suite, de sorte qu'on déduira de là une suite illimitée de series dérivées toutes convergentes dans le cercle C. – On aura de même une suite illimitée de séries intégrales, dont la $p^{\text{ième}}$ commencera par un polynôme de degré $p-1$ à cœfficients arbitraires et qui, toutes convergeront dans le cercle C.

Il résulte de ce qui précède que toutes les séries obtenues de la sorte auront un même cercle de convergence qui sera précisément C. En effet R étant le rayon de convergence de l'une quelconque de ces séries on aura, d'après ce qu'on vient de voir, $R' \geqslant R$; d'autre part, la série donnée sera par rapport à celle-là, soit une série intégrale, soit une série dérivée d'où l'on conclura $R \geqslant R'$! – On a donc nécessairement $R' = R$.

VI. Fonction définie par une série entière.

– Soit $f(z)$ la somme de la serie (1); $f(z)$ est une fonction finie et uniforme dans tout l'intérieur du cercle (C). Nous allons établir qu'elle est continue, et pour cela il nous suffira de faire voir qu'elle converge uniformément dans tout le cercle C, ou plutôt dans un cercle de rayon R', R' étant inférieur à R et d'ailleurs aussi voisin qu'on voudra de R.

En effet la série

$$|a_0| + |a_1| R' + \qquad + |a_n| R'^n + \cdots\cdots$$

est convergente et par suite on peut, étant donné un nombre ε, trouver un entier p tel qu'on ait pour $n \geqslant p$

$$|a_n| R'^n + |a_{n+1}| R'^{n+1} + \cdots\cdots\cdots < \varepsilon.$$

Soit, maintenant, z l'affixe d'un point quelconque pris à l'intérieur du cercle de rayon R'; on aura les mêmes valeurs de z.

$$|f(z) - f_n(z)| < |a_n| R'^n + |a_{n+1}| R'^{n+1} + \cdots$$

et par suite

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

donc la série est bien uniformément convergente et par suite continue pour toutes les valeurs de z dont le module est moindre que R'.

$f(z)$ est donc uniforme, finie et continue dans le cercle (C); nous allons enfin montrer qu'elle est analytique et déterminer sa dérivée. – Considérons pour cela la série double

$$
(2) \qquad
\begin{array}{lllll}
a_0 & & & & \\
a_1 z & a_1 h & & & \\
a_2 z^2 & 2a_2 z h & a_2 h^2 & & \\
\vdots & & & & \\
a_n z^n & \frac{n}{1} a_n z^{n-1} h & \frac{n(n-1)}{1.2} a_n z^{n-2} h^2 & \cdots\cdots\cdots & a_n h^n \\
\vdots & & & & \vdots
\end{array}
$$

Nous supposons toujours $|z| < R$ – Si nous remplaçons z, h, et les $\underline{a}$ par leurs modules r ρ, α nous aurons :

$$
(3)\quad
\begin{array}{llll}
\alpha_0 & & & \\
\alpha_1 r & \alpha_1 \rho & & \\
\alpha_2 r^2 & 2\alpha_2 \rho r & \alpha_2 r^2 & \\
\vdots & & & \\
\alpha_n r^n & \frac{n}{1}\alpha_n r^{n-1}\rho & \cdots & \alpha_n \rho^n \\
\vdots & & & \vdots
\end{array}
$$

Or le tableau (3) est convergent quand on l'évalue par lignes horizontales ; il se réduit en effet à la série linéaire :

$$\alpha_0 + \alpha_1 (r+\rho) + \alpha_2 (r+\rho)^2 + \qquad + \alpha_n (r+\rho)^n +$$

et $r+\rho$ est l'affixe d'un point de l'axe OX, intérieur à C, pourvu que h soit, comme nous le supposons, inférieur à $R - \varepsilon$; cette série linéaire est donc la serie des modules de (1) pour un point intérieur à (C) elle est donc convergente.

Dès lors le tableau (2) des modules étant convergent, pour un mode particulier d'évaluation, il en est de même du tableau (2) et de plus on peut calculer la somme à l'aide de tel mode d'évaluation qu'on voudra.

En l'évaluant par lignes horizontales on trouve

$$a_0 + a_1 (z+h) + a_2 (z+h)^2 + \cdots + a_n (z+h)^n + \qquad = f(z+h)$$

Evaluons le maintenant par lignes verticales nous aurons

$$f(z) + \frac{h}{1} f_1(z) + \frac{h^2}{1.2} f_2(z) \cdots\cdots + \frac{h^n}{1.2.\cdots n} f^{(n)}(z) +$$

f_i représentant la somme de la série dérivée d'ordre i. – On aura donc :

$$f(z+h) = f(z) + \frac{h}{1} f_1(z) + \frac{h^2}{1.2} f_2(z) + \cdots\cdots$$

d'où

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z) + \frac{h}{1.2} f_2(z) \cdots\cdots\cdots + \frac{h^{n-1}}{1.2.n} \cdot f_n(z) +$$

z étant constant faisons décroître $\underline{h}$; le second membre est une série entière convergente dans un cercle de rayon $R - z$. Donc ce second membre variera d'une manière continue et comme il se réduit à $f_1(z)$ pour $h=0$ il tendra vers $f_1(z)$ pour h infiniment petit donc on aura :

$$\lim \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z)$$

Donc enfin $f(z)$ a une dérivée qui n'est autre que la série dérivée.

En résumé.

1°. – La somme d'une série entière est une fonction holomorphe dans le cercle de convergence.

2°. – Elle admet une suite illimitee de dérivées toutes holomorphes dans le même

cercle et dont chacune se déduit de la précédente en remplaçant chaque terme par sa dérivée

3°. - On obtient par l'opération inverse une suite illimitée de séries dont chacune a pour dérivée celle qui le précède; et qui définissent également des fonctions holomorphes dans le cercle C.

Remarque. - Si la série reste convergente en un point ζ du cercle de convergence et que $A + iB$ soit la somme de cette série il est facile de montrer que la continuité s'étendra jusqu'à ce point inclusivement, c'est-à-dire que $f(z)$ tendra vers A, quand z tendra vers ζ, pourvu que l'on se déplace suivant le rayon qui aboutit au point ζ.

En effet soit α l'argument de ζ, si on pose $a_n e^{n i \alpha} = b_n$, $z = re^{\alpha i}$, on aura

$$f(z) = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 \qquad + b_n r^n +$$

Soit maintenant $b_n = A_n + iB_n$, les deux séries étant réelles

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n \dots$$
$$B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + \qquad + B_n r^n + \dots$$

Sont par hypothèse convergentes pour $z = R$ et ont pour sommes respectives A, B; donc d'après un théorème démontré (1° Partie page 54) ces deux sommes varient d'une manière continue et ont pour limites A, B quand z tend vers R. Donc enfin $f(z)$ tend d'une manière continue vers $A + iB$ quand z tend vers ζ. - Il serait d'ailleurs impossible de rien affirmer, si on se rapprochait de ce point ζ suivant tout autre chemin

VII - Définition des fonctions simples. - Les séries entières que nous avons rencontrées dans le théorie des variables reelles se généralisent sans difficulté! Par exemple la série.

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} \dots \quad + \frac{z^n}{1.2.n} + \dots$$

étant convergente pour z réel et aussi grand qu'on voudra, est convergente pour toute valeur de z. elle définit une fonction holomorphe pour toute valeur finie de z et qui se reproduit par la dérivation il est donc naturel de prendre cette série comme définition de e^z. On retrouve ainsi la même fonction que nous avons définie par la propriété $f(z + z') = f(z) \cdot f(z')$

De même les deux séries

$$\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \qquad \pm \frac{z^n}{n} \mp$$

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \dots$$

étant convergentes pour une valeur de module 1 et divergentes pour toute valeur de module plus grand définissent dans le cercle de rayon I deux fonctions holomorphes qui présenteraient des propriétés analogues à celles de $L(1+x)$ et de $\operatorname{arctg} x$. Il

est dès lors naturel de les prendre comme définition de deux fonctions nouvelles que nous représenterons par $L(1+z)$, arc tg z ; ces fonctions sont moins générales que celles que nous avons désignées antérieurement par le même symbole ; elles représentent les déterminations du logarithme et de l'arc tangente qui s'annulent pour $z = 0$.

Remarque. – Si on differentie n fois l'équation

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 \qquad + A_n z^n + -$$

et qu'on y fasse ensuite $z = 0$, on obtient la relation

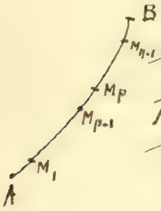
$$A_n = \frac{1}{1.2..n} f^{(n)}_{(0)}$$

On en conclut qu'une fonction donnée ne peut être développée que d'une manière en série entière dans un cercle de rayon donné. –

Quatrième Leçon.

Intégrales définies.

I – Définition – La notion d'integrale définie s'introduit d'une façon toute naturelle, de la manière suivante, dans la théorie des fonctions de variables complexes.



Soit $f(z) = X + iY$ une fonction de z qui reste déterminée, finie et continue tout le long d'un arc fini AB. Partageons cet arc en n arcs partiels par les points $A, M_1, M_2 \dots\dots M_p \dots\dots M_{n-1}, B$; soit z_p l'affixe de MP et considérons la somme

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} f(z_p)(z_{p+1} - z_p)$$

Je dis que, si n augmente indéfiniment de telle sorte que chacun des arcs partiels tende vers 0, S_n aura une limite déterminée, c'est-à-dire indépendante de la loi de subdivision ; cette limite sera, par définition, l'intégrale définie de la fonction $f(z)$ prise le long du contour AB et nous la représenterons par le symbole

$$I = \int_{(AB)} f(z)\, dz.$$

Pour démontrer l'existence de cette limite, nous supposerons que l'arc AB est continu, c'est-à-dire tel qu'on puisse exprimer, le long de cet arc, x et y par deux fonctions continues $\varphi(t)$ $\psi(t)$ d'une même variable ; dans ces conditions X et Y deviendront par substitution deux fonctions de t, qui variera de t_0 à T quand on parcourra AB. Ceci posé, on aura,

$$f(z_p)(z_{p+1} - z_p) = (X_p + iY_p)(\delta x_p + i\delta y_p)$$

et par suite :

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} (X_p \delta x_p - Y_p \delta y_p) + i \sum_{p=0}^{p=n-1} (X_p \delta y_p + Y_p \delta x_p)$$

Or si n augmente indéfiniment, les deux sommes ci-dessus ont des limites parfaitement déterminées égales respectivement aux deux integrales définies:

$$\int_{t_0}^{T} (X\varphi' + Y\psi')\,dt, \qquad \int_{t_0}^{T} (X\psi' - Y\varphi')\,dt$$

prises le long de AB; le théorème énoncé est donc démontré et on a de plus;

$$\int_{(AB)} f(z)dz = \int_{(AB)} (X\,dx - Y\,dy) + i\int_{(AB)} (X\,dy + Y\,dx)$$

La définition qui précède donne lieu aux remarques suivantes

1º La démonstration ne suppose en aucune façon que la fonction $f(z)$ soit analytique, elle ne suppose même pas que cette fonction soit définie en dehors du chemin d'intégration.

2º Elle subsiste évidemment si $f(z)$, tout en restant finie, cesse d'être continue en un nombre limité de points du contour AB; elle subsiste également si ce contour est formé d'un nombre fini d'arcs dont chacun satisfasse à la condition de continuité que nous avions imposée au contour total.

3º L'intégrale prise le long d'un contour formé de deux chemins consécutifs est égale à la somme des intégrales prises le long de deux contours partiels; elle a deux valeurs égales et de signes contraires, pour un même contour parcouru dans deux sens différents.

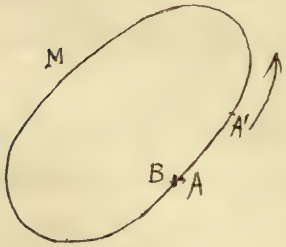
4º Enfin on a évidemment, d'après la définition même

$$\int_{AB} f(z)\,dz \leq lM$$

l étant la longueur du contour, M le module maximum de $f(z)$ le long de ce contour.

II — Contour fermé. —

Supposons que le contour soit fermé et qu'on le suive dans un sens déterminé; la fonction $f(z)$ supposée déterminée en chaque point, pourra cependant revenir en A avec sa valeur initiale ou avec une autre valeur; dans le premier cas nous dirons que $f(z)$ est uniforme le long de AB.



Si cela a lieu, on aura la même valeur de l'intégrale définie, quel que soit le point de départ.

En effet, $f(z)$ reprenant en A sa valeur initiale aboutira en un point quelconque M du contour avec une seule et unique valeur, quel que soit le nombre de fois et le sens dans lequel on aura parcouru la courbe. Si I et I' désignent les deux intégrales correspondant à deux points de départ A, A', on aura évidemment

$$I = (AA') + (A'M) \qquad I' = (A'MA) + (AA')$$

(C) indiquant l'intégrale le long du chemin C; or comme les valeurs initiales de la fonction sont les mêmes dans les deux cas, on a bien $I = I'$.

Il n'en serait plus de même si $f(z)$ n'était pas uniforme.

Pour éclaircir ceci par un exemple, prenons comme contour un cercle de centre O et de rayon R ; et cherchons l'intégrale de $\sqrt{z}$ prise le long de ce contour. On a ici

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$dz = R(-\sin\theta + i\cos\theta)\, d\theta$$

et l'intégrale est, α désignant l'argument du point de départ :

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \sqrt[3]{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)(i\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta$$

elle se scinde en deux autres et peut s'écrire

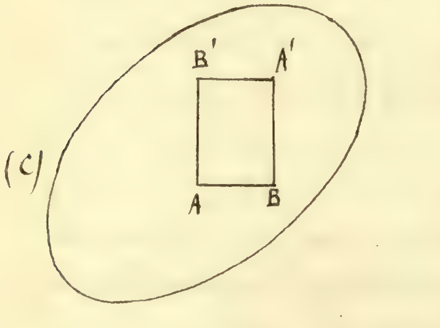
$$-\sqrt[3]{R}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \sin\frac{3\theta}{2}\, d\theta + i\sqrt[3]{R}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \cos\frac{3\theta}{2}\, d\theta = \frac{2}{3}\sqrt[3]{R}\left[\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right]_\alpha^{2\pi+\alpha} = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{R}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} + i\sin\frac{3\alpha}{2}\right)$$

L'intégrale dépend donc absolument de α ; cela tient à ce que la fonction $f(z)$ n'est pas uniforme le long du contour d'intégration.

Considérons au contraire le cas $f(z) = \frac{1}{z}$; on aura en intégrant encore le long d'un cercle de rayon (R) :

$$\int \frac{dz}{z} = i\int_\alpha^{2\pi+\alpha} d\theta = 2i\pi.$$

L'intégrale ne dépend pas du point de départ, c'est-à-dire de α ; cela tient à ce que $\frac{1}{z}$ est uniforme le long du contour d'intégration.



Ce qui précède nous amène naturellement à la question suivante : Dans une aire donnée (C) on peut tracer une infinité de contours fermés ; si la fonction $f(z)$ est déterminée, finie, continue et uniforme, à l'intérieur de (C) chaque contour donnera une intégrale indépendante du point de départ ; quelles conditions faut-il ajouter aux précédentes pour que cette intégrale soit la même sur tous les contours considérés ?

Il est d'abord évident que la valeur constante de l'intégrale devra être 0 puisque l'on peut donner aux contours d'intégration des dimensions infiniment petites. – (Nous supposons ici que l'aire soit limitée par un contour unique). Envisageons, en général, l'intégrale curviligne :

$$(1) \qquad \int (P\,dx + Q\,dy).$$

et cherchons dans quel cas cette intégrale sera nulle le long de tout contour fermé intérieur à (C) ; Nous supposons que les fonctions réelles P, Q, sont continues et uniformes et admettent des dérivées partielles du premier ordre, également continues pour tous les systèmes de valeurs de x, y correspondant aux points situés sur le contour ou dans son intérieur ; la région que nous appelons

intérieure est choisie arbitrairement entre les deux régions que sépare le contour ; nous dirons alors que le sens direct, sur ce contour, est celui dans lequel un observateur doit le parcourir pour avoir à sa gauche la région intérieure. — Ceci posé il faut d'abord que P et Q soient uniformes le long de toute ligne tracée à l'intérieur de (C) cela résulte de ce qui précède. — Pour obtenir une nouvelle condition nécessaire, considérons un carré $ABA'B'$ de côté l, et écrivons que l'intégrale (1) est nulle le long du périmètre de ce carré. Soit

$$P = \varphi(x,y) \qquad Q = \phi(x,y)$$

on aura en désignant par a, b les coordonnées de A :

$$\int_a^{a+l} \varphi(x,b)\,dx + \int_b^{b+l} \psi(a+l,y)\,dy + \int_{a+l}^{a} \varphi(x,b+l)\,dx + \int_{b+l}^{b} \psi(a,y)\,dy = 0.$$

ou

$$\int_a^{a+b} \left[\varphi(x,b+l) - \varphi(x,b)\right] dx = \int \left[\psi(a+l,y) - \psi(a,y)\right] dy$$

ou, en remarquant que $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ sont continues

$$\int_a^{a+l} \varphi'_y(x,b+\theta l)\,dx = \int_b^{b+l} \psi'_x(a+\lambda l,y)\,dy$$

θ et λ étant compris entre 0 et I. Appliquons le théorème de la moyenne (1ère Partie, page 108) à chacune de ces deux intégrales nous aurons en divisant par l :

$$\varphi'_y(a_1,b_1) = \psi'_x(a_2,b_2)$$

a_1, a_2 étant compris entre a et $a+l$, b, b_2 entre b et $b+l$. — Si maintenant nous faisons tendre l vers 0 et que nous observions que a, b sont les coordonnés d'un point absolument arbitraire, nous aurons la condition cherchée savoir

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

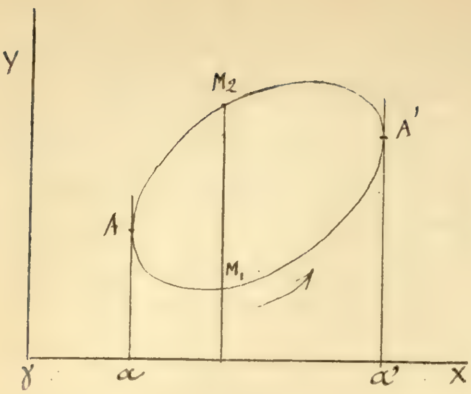
III — La relation (2) exprime que $P\,dx + Q\,dy$ doit être une différentielle totale exacte ; cette condition est nécessaire d'après ce qui précède ; nous allons établir qu'elle est suffisante. Pour cela considérons l'intégrale double

$$\int\int_{(c)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = V$$

étendue à tous les points de l'aire limitée par une courbe C, intérieure à C ; elle représente le volume compris entre le plan des x, y, un cylindre parallèle à OZ et ayant C_1 pour section droite, et enfin la surface $Z = \frac{\partial P}{\partial y}$. — Supposons, pour simplifier que la courbe C_1 soit convexe, et intégrons d'abord par rapport à y puis par rapport à x, nous aurons :

$$V = \int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy$$

a a' étant les abscisses extrêmes de (C), y_1, y_2 étant les deux fonctions de x qui



correspondent aux points d'entrée et de sortie d'une parallèle à Oy, par rapport à la courbe (C) ; la première intégration se fait immédiatement et on a :

$$V = \int \left[\varphi(x\, y_2) - \varphi(x\, y_1) \right] dx$$

Si on remarque que x va en croissant de a, a' sur l'arc inférieur AMA' et au contraire décroît de a' à a sur $A'M_2A$; on voit immédiatement que V s'exprime par l'intégrale curviligne :

$$V = -\int_{(C_1)} \varphi(x, y)\, dx = -\int_{(C_1)} P\, dx$$

On démontrerait de même que

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = +\int_{(C_1)} \psi(x, y)\, dy = +\int_{(C)} Q\, dy$$

On aura donc en définitive

$$(3) \qquad \int_{(C_1)}\!\!\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{(C_1)} (P\, dx + Q\, dy)$$

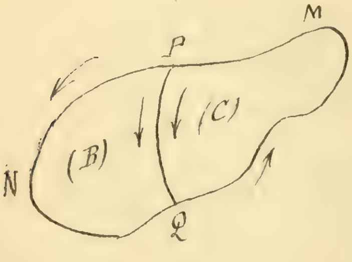
Cette relation qui permet de transformer une intégrale double en intégrale curviligne et inversement, met en évidence la propriété que nous voulions démontrer ; si en effet $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ l'intégrale étant évidemment nulle, il en est de même de l'intégrale curviligne considérée.

En résumé les fonctions uniformes $P\,Q$ étant supposées finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, en tous les points d'une aire donnée et sur son contour, pour que l'intégrale curviligne

$$\int P\, dx + Q\, dy$$

prise entre deux points quelconques de cet aire, soit indépendante du contour d'intégration, il faut et il suffit que $P\,dx + Q\,dy$ soit une différentielle totale exacte.

Remarques. — Nous avons supposé convexe le contour fermé d'intégration ; or on voit immédiatement que l'intégrale prise le long du contour d'une aire A qui résulte de la juxtaposition de deux aires partielles BC est égale à la somme des Intégrales prises le long des contours des deux aires partielles. On a en effet, en supposant les contours parcourus dans le sens direct et en désignant toujours par (C) l'Intégrale prise le long d'une ligne (C)

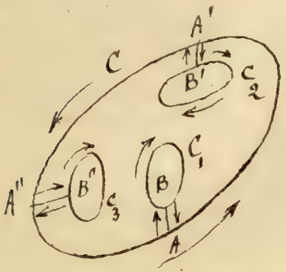


$$(QMPNQ) = \left[(QMP) + (PQ) \right] + \left[(QP) + (PNQ) \right]$$

à cause de l'égalité $(PQ) + (QP) = 0$.

D'après cela on pourra toujours par des transversales décomposer l'aire en une

somme limitée d'aires partielles dont chacune soit convexe, et le théorème général démontré plus haut se trouve ainsi étendue à une aire limitée par un seul contour, de forme quelconque.



On a souvent à considérer des aires à connexion multiple, c'est-à-dire limitées par plusieurs contours ; par exemple l'aire comprise entre une courbe C et d'autres courbes $C_1 C_2 C_3$ intérieures à la première. Le résultat obtenu précédemment s'applique à une pareille aire et donne lieu à un énoncé différent. Relions les courbes $C_1 C_2 C_3$ au contour extérieur par des traverses de forme quelconque AB, $A'B'$, $A''B''$ – Suivons le contour fermé ($ABC_1BA.AA'.A'B'C_2B'.B'A'.A'A''B''C_3B''A''.A''A$) dans le sens indiqué par les flèches. Le contour étant fermé l'intégrale sera nulle ; si on supprime les parties relatives aux traverses, dont chacune est parcourue deux fois dans deux sens opposés, il reste : 1° l'intégrale relative au contour extérieur ; 2° chacune des intégrales relatives au contour $C_1 C_2 C_3$, supposés parcourus dans le sens rétropode si on envisage les aires intérieures à ces contours. – Donc enfin, si on parcourt les quatre contours dans le sens direct on est conduit à ce nouvel énoncé :

L'intégrale prise le long du contour intérieur est égale à la somme des intégrales prises dans le même sens le long de chacun des contours intérieurs.

IV – Théorème de Cauchy. —

Revenons à une fonction de variable complexe $f(z) = X + iY$; nous avons trouvé plus haut :

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = \int_{(C)} (X\,dx - Y\,dy)\,i + \int_{(C)} (X\,dy + Y\,dx)$$

Si la fonction $f(z)$ est continue, uniforme et de plus analytique dans l'aire limitée par C, et sur le contour lui-même, chacune des intégrales considérées sera nulle d'après ce qui précède puisque l'on aura dans ce cas.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

De là le théorème suivant :

Théorème. — L'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise le long d'un contour fermé intérieur à une aire dans laquelle $f(z)$ reste holomorphe, est nulle.

On en déduit immédiatement, par un raisonnement identique à celui que nous avons fait plus haut, que, si $f(z)$ est holomorphe dans une aire limitée par plusieurs contours fermés, et sur ces contours eux-mêmes, l'Intégrale prise le long du contour extérieur est égale à la somme des intégrales prises le long des contours intérieurs, ceux-ci étant parcourus dans le même sens.

Enfin on peut encore énoncer le même théorème sous l'une des formes suivantes :

L'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long d'un chemin a, b ne dépend que des limites et non du chemin d'intégration, pourvu que le chemin reste compris à l'intérieur d'une aire dans laquelle la fonction soit holomorphe.

L'Intégrale prise le long d'un contour fermé ne varie pas si on déforme ce contour sans lui faire atteindre aucun point pour lequel la fonction cesse d'être holomorphe

A cause de l'importance du théorème précédent nous en donnerons une autre démonstration, fondée uniquement sur la notion de la dérivée; cette démonstration a été donnée par M. Goursat (acta Math. Tome IV page 197). Elle repose sur les lemmes suivants:

Lemme I — Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une aire et sur son contour, l'expression

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)$$

tend uniformément vers 0 quand h tend vers 0.

Si nous posons en effet

$$f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) \qquad f'(z) = \varphi'_x + i\psi'_x \quad h = \alpha + i\beta$$

nous aurons

$$f(z+h)-f(z) = \Delta\varphi + i\Delta\psi = \alpha(\varphi'_x+\varepsilon) + \beta(\varphi'_y+\varepsilon') + i\alpha(\psi'_x+\varepsilon'') + i\beta(\psi'_y+\varepsilon''')$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ tendant uniformément vers 0 avec α et β puisqu'on suppose $\varphi'_x\ \psi'_x$ continues dans l'aire et sur son contour (I. page 119) – Si on remplace alors φ'_y par $-\psi'_x$, ψ'_y par φ'_x

$$f(z+h)-f(z) = (\alpha+i\beta)(\varphi'_x + i\psi'_x) + \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + i\alpha\varepsilon'' + i\beta\varepsilon'''$$

Or si on se donne un nombre positif λ, on peut trouver un nombre η indépendant de x, y et tel que pour $|h| < \eta$, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$, soient des modules inférieurs à λ, et que par suite $\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + i\alpha\varepsilon'' + i\beta\varepsilon'''$ ait un module moindre que $4\lambda|h|$; on en conclut

$$\frac{f(z+h)-fz}{h} - \varphi'_x - i\psi'_x < 4\lambda$$

pour les mêmes valeurs de h; donc le lemme est démontré.

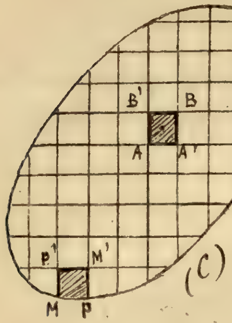
Lemme II. — Chacune des intégrales $\int dz$, $\int z\,dz$ est nulle, quand on le prend le long d'un contour fermé quelconque

Cela est à peu près évident; on a, en effet:

$$\int dz = \int dx + i\int dy \qquad \int z\,dz = \int x\,dx - \int y\,dy + i\int(x\,dy + y\,dx)$$

Or les quantités $x, y, \frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}, x, y$ sont des fonctions uniformes dont la variation totale est évidemment nulle quand on parcourt une ligne fermée

quelconque ; le lemme est donc établi.



Ceci posé menons deux suites de droites parallèles à OX OY, équidistants de manière à inscrire dans l'aire un réseau de carrés de côté l. L'intégrale de la fonction uniforme $f(z)$ prise le long de C est égale à la somme des intégrales prises le long de chacun des contours partiels ainsi déterminés.

Soit d'abord un carré $ABA'B'$ complètement intérieur à (C) ; z_1 un point intérieur à ce carré ; posons

$$(1)\quad \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} - f'(z_1) = \varphi(z, z_1)$$

et d'après le lemme (1), si z est l'affixe d'un point situé sur le contour du carré on pourra supposer l assez petit pour avoir partout $|\varphi(z, z_1)| < \varepsilon$, ε étant un nombre arbitraire. Nous supposerons que l ait été déterminé de telle sorte que cela ait lieu. L'égalité (1) donne alors

$$\int f(z)\,dz = f(z_1)\int dz + f'(z_1)\int z\,dz - z_1 f'(z_1)\int dz + \int \varphi(z, z_1)(z-z_1)\,dz$$

Si nous prenons l'intégrale le long du contour $ABA'B'$, les trois premiers termes du 2e membre sont nuls (Lemme II); et la dernière intégrale porte sur une fonction dont le module maximum et inférieur, le long du contour, à $l\sqrt{2}\,.\,\varepsilon$, car $|z - z_1| < l\sqrt{2}$; d'ailleurs le contour d'intégration étant de longeur $4l$, on a

$$\left|(AA'BB')\right| < 4l^2\sqrt{2}\,.\,\varepsilon.$$

Donc si on fait la somme des intégrales relatives à tous les carrés complets, on aura une somme dont le module sera certainement moindre que

$$4A\varepsilon\sqrt{2}$$

A étant l'aire totale comprise dans la courbe (C).

Passons maintenant à un carré écorné par le contour $MPM'P'$; nous aurons encore

$$\int f(z)\,dz = \int \varphi(z, z_1)(z - z_1)\,dz$$

z_1 étant l'affixe d'un point intérieur ; ici encore la fonction soumise à l'intégration a un module moindre que $\varepsilon l\sqrt{2}$; d'autre part la longueur du contour est certainement inférieur à $4l + \sigma$, σ étant la longueur de la partie curviligne ; le module de l'intégrale est donc moindre que $(4l+\sigma)\varepsilon l\sqrt{2}$ et la somme de toutes les intégrales correspondantes aura un module inférieur à

$$4A\varepsilon\sqrt{2} + Sl\varepsilon\sqrt{2}$$

S étant la longueur totale du contour C. On aura donc enfin

$$\left|\int_{(C)} f(z)\,dz\right| < \varepsilon\sqrt{2}\,[8A + Sl]$$

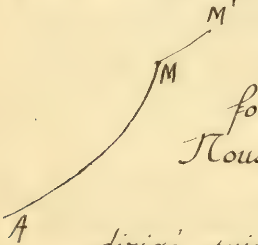
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Mais cette intégrale est une constante et puisque son module est inférieur à un nombre positif qui est absolument arbitraire, on en conclut que cette intégrale est nulle - ce qu'on voulait démontrer

Il est évident que cette démonstration ne suppose absolument rien sur la forme du contour, qui peut être formé d'une seule courbe, ou de plusieurs courbes distinctes.

V_ Intégrale considérée comme fonction de sa limite supérieure.

La fonction $f(z)$ étant supposée holomorphe dans une aire (C), relions un point fixe A de cette aire à un point variable M d'affixe z et cela par un chemin contenu dans l'aire. L'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long de ce chemin sera indépendante du chemin lui-même et se réduira à une fonction $F(z)$ de la limite supérieure. Cette fonction est, d'après le théorème précédent uniforme dans l'aire (C).



Nous allons montrer de plus qu'elle est continue et analytique.

En effet donnons à z un accroissement MM' que nous supposerons dirigé suivant une droite de direction quelconque et que nous désignerons par h. On a évidemment

$$F(z+h) - F(z) = \int_{(MM')} f(z+u)\,du$$

u variant de 0 à h quand on parcourt MM'. Or on a

$$f(z+u) = f(z) + \varphi(z,u)$$

$\varphi(z,u)$ étant une fonction continue de u, qui s'annule pour $u=0$. On aura donc:

$$F(z+h) - F(z) = f(z)\int_0^h du + \int_0^h \varphi(z,u)\,du$$

ou

$$F(z+h) - F(z) = h f(z) + \int_0^h \varphi(z,u)\,du$$

Mais, à cause de la continuité, si on se donne un nombre ε, on pourra lui faire correspondre un nombre η tel que pour $|h| < \eta$, on ait $|\varphi(z,u)| < \varepsilon$ tout le long de la droite MM'; dans ces conditions l'intégrale aura un module moindre que εh; on en conclura

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) < \varepsilon$$

Donc enfin $F(z)$ est continue et, de plus, a une dérivée déterminée, qui n'est autre que $f(z)$. En résumé la fonction $F(z)$ est holomorphe dans l'aire (C)

VI_ Dérivation sous le signe.

Quelques-unes des propriétés des intégrales définies réelles s'étendent au cas d'une variable imaginaire - Nous nous arrêterons à l'une des plus importantes qui concerne la dérivation sous le signe.

Supposons une fonction $f(z, u)$ holomorphe dans le champ (C, C') des deux variables z, u. Soit AB, un arc contenu dans l'aire C. L'intégrale $\int_{(AB)} f(z, u) dz$ est une fonction de u définie dans l'aire C'. Nous la désignerons par $F(u)$.

Cette fonction de u est évidemment finie et uniforme ; nous allons prouver qu'elle est continue et analytique et trouver l'expression de sa dérivée. Soient u, $u+h$ deux valeurs de u, appartenant à l'aire C'. On a :

$$F(u+h) - F(u) = \int_{(AB)} \left[f(z, u+h) - f(z, u) \right] dz$$

Par hypothèse $f(z, u)$ est holomorphe par rapport à u dans le champ (C') d'après un lemme démontré plus haut, si on pose

$$\frac{f(z u+h) - f z}{h} - f'_u(z, u) = \varphi(z, u, h)$$

La fonction φ tendra uniformément vers 0 avec h. On aura alors

$$\frac{F(u+h - F(u)}{h} - \int_{(AB)} f'(z, u) dz = \int_{(AB)} \varphi(z, u, h)$$

Mais ε étant un nombre quelconque > 0, on peut trouver η tel que l'on ait (z et u étant quelconques)

$$|\varphi(z, u, h)| < \varepsilon \quad \text{pour } |h| < \eta$$

Dans le module du second membre est inférieur à εl, l étant la longueur du contour AB. On en conclut immédiatement que $F(u)$ est continue et admet pour dérivée

$$F'(u) = \int_{(AB)} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot dz$$

Remarque. —— Il serait aisé d'établir une formule plus générale relative au cas où les limites seraient fonctions de u, au lieu d'être fixes. Nous n'insisterons pas sur ce point.

Nous ne nous arrêterons pas davantage à l'extension, bien facile d'ailleurs, de la règle d'intégration sous le signe $\int$, ces différents résultats ne devant pas intervenir dans les questions que nous nous proposons de traiter.

Dans la plupart des cas l'extension d'une règle connue de calcul intégral pourra se faire par une simple vérification, ainsi que nous avons procédé (page 21) pour le théorème des fonctions composées.

Prenons, par exemple, la question très importante du changement de variable. Supposons qu'on veuille substituer à $Z = x + iy$ une autre variable $u = \xi + i\eta$, liée à Z par l'équation

$$Z = F(u) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$$

La règle connue pour changer de variable sous une intégrale définie

s'applique sans difficulté à une intégrale curviligne, et on aura, en représentant par $\bar{H}$ ce qui devient $H(x, y)$ quant on y remplace x, y par leurs valeurs en fonction de ξ, η ;

$$\int_{(C)} X dx - Y dy = \int_{(C')} \left(\bar{X} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \bar{Y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\bar{X} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \bar{Y} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) d\eta$$

$$\int_{(C)} X dy + Y dx = \int_{(C')} \left(\bar{X} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \bar{Y} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\bar{X} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \bar{Y} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) d\eta$$

C' étant la courbe que décrit u lorsque z décrit C. Si on ajoute ces deux relations après avoir multiplié la seconde par i et qu'on tienne compte des relations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

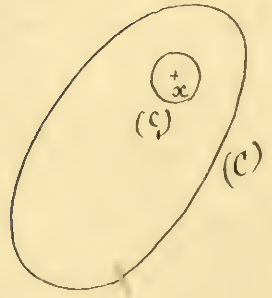
on obtient

$$\int_{(C)} f(z) dz = \int_{(C')} (\bar{X} + i \bar{Y}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + i \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) (d\xi + i d\eta) = \int_{(C')} f[\varphi(u)] \varphi'(u) du$$

Ainsi se trouve établie la règle du changement de variable dans une intégrale définie.

VII — Formule de Cauchy. —

Revenons au cas d'une intégrale prise le long d'un contour (C) intérieur à une aire dans laquelle $f(z)$ reste holomorphe ; mais considérons la fonction $\frac{f(z)}{z-x}$, x étant un point intérieur à (C) ; cette fonction n'est pas holomorphe dans (C) puisqu'elle devient infinie pour $z = x$ mais elle l'est dans l'aire à deux contours qu'on obtient en décrivant du point x comme centre un cercle de rayon ρ, intérieur à (C) ; on a donc d'après une des formes que nous avons données au théorème de Cauchy :



$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

Comme la première intégrale ne dépend en aucune façon de ρ, la seconde doit en être également indépendante et nous pouvons la calculer en supposant ρ infiniment petit. Or si on pose

$$z = x + \rho e^{\theta i} \qquad dz = i \rho e^{\theta i} d\theta$$

cette seconde intégrale a pour valeur

$$i \int_0^{2\pi} f(x + \rho e^{\theta i}) d\theta$$

Pour $\rho = 0$ elle se réduit à $2 i \pi f(x)$. Mais on n'a pas le droit de supposer

$\rho=0$; remarquons alors que ρ étant une fonction continue, si on pose

$$f(x+\rho e^{\theta i}) = f(x) + \varphi(x,\rho,\theta),$$

on pourra supposer ρ assez petit pour que $\varphi(x,\rho,\theta)$ ait, quelque soit θ, un module moindre que ε. On aura alors:

$$\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz - 2i\pi f(x) = i\int_0^{2\pi} \varphi(x,\rho,\theta)\,d\theta$$

et la seconde intégrale aura un module moindre que $2\pi\varepsilon$. Ainsi le premier membre de l'égalité précédente a un module moindre que toute quantité donnée, donc il est rigoureusement nul et on a

$$(2)\qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

Cette formule, dont nous nous servirons constamment, est due à Cauchy; elle permet de calculer la valeur de $f(z)$ en un point quelconque de l'aire considérée en fonction des valeurs que $f(z)$ prend sur le contour.

L'intégrale du second membre où x figure à titre de paramètre est une fonction continue de $\underline{x}$ et admet des dérivées de tout ordre; il en est donc de même de $f(x)$ et on a sans peine les formules suivantes:

$$f'(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(z-x)^2}\,dz \qquad f''(x) = \frac{1.2}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(z-x)^3}\,dz \qquad f^{(n)}(x) = \frac{1.2..n}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

Ainsi se trouve établi un résultat que nous avions accepté sans démonstration (page 5), à savoir que si une fonction est holomorphe dans le domaine d'un point donné, il en est de même de sa dérivée, et par suite de ses dérivées d'ordre quelconque.

Cinquième Leçon.

Sur les Fonctions harmoniques et le problème de Dirichlet

I. Formule de Green

Une fonction réelle V de deux variables $x\ y$ est dite harmonique dans une aire donnée, lorsqu'elle est en tous les points de cette aire uniforme et continue et que, de plus elle satisfait constamment à la condition:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Nous avons déjà fait observer que V étant une solution de cette équation, il existe une autre solution U, qu'on peut appeler complémentaire de V,

qui est déterminée à une constante près et, telle que $U + iV$, soit holomorphe dans l'aire donnée ; que, par suite, la théorie des fonctions analytiques est identique à celle des fonctions V que nous venons de définir. Nous nous arrêterons ici sur quelques unes des propriétés les plus essentielles des fonctions V harmoniques.

Et d'abord, la formule fondamentale de Cauchy

$$(1) \qquad 2i\pi f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x} dz$$

doit correspondre à une formule (C) analogue dans la théorie des fonctions harmoniques.

C'est cette formule que nous commencerons par établir, en le déduisant de de la formule (1).

D'une manière générale, si à partir du point x, y on se déplace suivant un chemin rectiligne de longueur de $\underline{l}$ faisant avec OX un angle α, une fonction $F(x, y)$ prendre un accroissement

$$AF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \sin\alpha + \mathcal{E}\right) dl$$

$\mathcal{E}$ étant infiniment petit en même temps que dl ; la limite du rapport $\frac{AF}{dl}$ est ce qu'on nomme la dérivée de F suivant la direction α ; on la représente par $D_\alpha F$ et on a :

$$D_\alpha F = \frac{\partial F}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \sin\alpha.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ ne sont que des cas particuliers de ces dérivées générales ; elles correspondent à des déplacements effectués parallèlement aux parties positives des axes de coordonnées. — Il serait très-facile d'étendre à ces dérivées prises suivant une direction quelconque les principales règles du calcul différentiel.

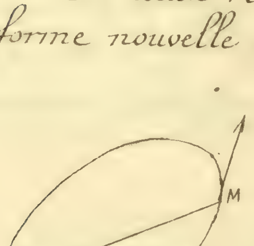
Si $X + Y$ est une fonction analytique on a

$$D_\alpha X = \frac{\partial X}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial X}{\partial y} \sin\alpha = -\frac{\partial Y}{\partial x} \sin\alpha + \frac{\partial Y}{\partial y} \cos\alpha = D_{\alpha+\frac{\pi}{2}} Y.$$

et de même :

$$D_\alpha Y = - D_{\alpha+\frac{\pi}{2}} X.$$

Ces deux relations sont identiques ; l'une ou l'autre exprime sous une forme nouvelle que $X + iY$ est analytique.



Revenons maintenant à la question que nous nous sommes posée. — Prenons pour origine un point quelconque O de l'aire, et soit M un point quelconque du contour ; les coordonnées polaires r, θ du point M seront des fonctions connues de l'arc s, compté à partir d'un point fixe A. On aura d'après la formule

de Cauchy :

$$2i\pi(U_0 + iV_0) = \int_{(c)} (U + iV)\frac{dz}{z}$$

Si nous posons:

$$z = re^{\theta i} \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i\,d\theta$$

et que nous égalions les parties réelles, il vient, l étant la longueur du contour:

$$-2\pi V_0 = \int_0^l \left(U\frac{dr}{ds}\cdot\frac{1}{r}\right)ds - \int_0^l \left(V\frac{d\theta}{ds}\right)ds$$

Si nous intégrons par parties la première intégrale, la fonction intégrée sera $U\,L\,r$ et comme elle reprend la même valeur pour $s=0$, $s=l$, cette partie intégrée sera nulle on aura alors

$$2\pi V_0 = \int_0^e \left(V\frac{d\theta}{ds} + Lr.\frac{dU}{ds}\right)ds$$

Cette formule résout la question ; on peut n'y laisser substituer que V ; on a en effet.

$$\frac{dV}{ds} = D_n V$$

en désignant par D_n la dérivée suivant la normale intérieure ; d'autre part, si on observe que $Lz = Lr + i\theta$ est une fonction analytique on aura également

$$\frac{d\theta}{ds} = -D_n\,Lr.$$

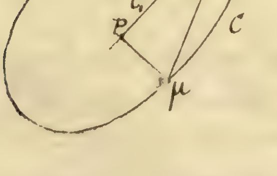
D'où enfin la relation suivante, connue sous le nom de formule de Green:

$$(2) \qquad 2\pi V_0 = \int_0^l (Lr.\,D_n V - V.\,D_n Lr)\,ds$$

Il faut bien remarquer que la formule (2) exige qu'on connaisse le long du contour, les valeurs que prennent, non seulement V, mais encore $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$

II. Problème de Dirichlet.

Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction qui soit harmonique dans une aire donnée et qui prenne, sur le contour de cette aire, une suite de valeurs données à l'avance.



Nous résoudrons la question dans le cas très-simple où l'aire est un cercle, mais nous devons d'abord faire quelques remarques essentielles.

Lorsqu'on définit ainsi une fonction par une propriété qu'elle doit posséder dans une aire donnée, il est clair qu'on exclut par cela même tout le reste du plan ; le contour de l'aire est donc l'ensemble des

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

points limites, au delà desquels la fonction n'est plus définie; tandis que jusqu'ici nous avons supposé les contours dont nous nous sommes servis intérieurs à une aire dans laquelle la fonction conservait des propriétés déterminées. Il est donc nécessaire de bien définir ce qu'on doit entendre par ces mots: valeur que prend la fonction sur le contour.

Supposons que lorsqu'on se dirige vers μ suivant un chemin quelconque la fonction $f(x,y)$, supposée continue dans l'aire, tend vers une limite déterminée A. Nous dirons alors que $f(x,y)$ prend, au point p, la valeur A. Si le même fait se produit en tous les points μ du contour, A sera une fonction de l'arc s; nous le désignerons par $\varphi(s)$.

Il est aisé de voir que $\varphi(s)$ doit être une fonction continue; en effet soient s $s+h$ les valeurs de s qui correspondent aux deux points p, p', décrivons du point μ comme centre un cercle de rayon ρ; supposons μ à l'intérieur de ce cercle; si la fonction $\varphi(s)$ est discontinue on aura

$$|\varphi(s+h)-\varphi(s)|>\delta$$

δ étant un nombre positif donné et cela, pour toutes les valeurs de ρ inférieures à un nombre donné ε. D'autre part il y aura, dans le cercle et non sur le contour deux points M, M', $(x,y)(x_1,y_1)$ tel qu'on ait

$$f(x,y)-\varphi(s)=\alpha \qquad f(x_1,y_1)-\varphi(s+h)=\beta$$

α et β étant tous deux, en module, inférieures à $\frac{\delta}{4}$. On aura donc $|\alpha-\beta|<\frac{\delta}{2}$. Mais on a:

$$f(x_1,y_1)-f(x,y)=\varphi(s+h)-\varphi(s)+(\alpha-\beta)$$

D'où l'on conclura:

$$|f(x_1,y_1)-f(x,y)|>\delta-\frac{\delta}{2} \text{ ou } \frac{\delta}{2}.$$

Donc dans un cercle de rayon infiniment petits on pourrait déterminer deux points de l'aire donnant à $f(x,y)$ deux valeurs ayant une différence finie, ce qui est absurde.

Il résulte immédiatement de là que la fonction étant continue dans l'aire et sur son contour, sera uniformément continue (I page 119). Mais nous pouvons aller plus loin et démontrer la proposition suivante.[1]

Si à chaque point μ du contour vient aboutir un chemin particulier tel que, le long de ce chemin, $f(x,y)$ tende uniformément vers $\varphi(s)$ la fonction prendra au point μ la valeur $\varphi(s)$.

En effet donnons-nous un nombre positif ε; il existe une longueur λ, indépendante de s, et telle que si on porte, sur le chemin spécial qui

[1] P. Painlevé. — Lignes singulières des fonctions analytiques. — Annales de Toulouse Tome II. page 20

aboutit en μ une longueur $\mu P = \lambda$, on ait pour tout point de l'arc μP

$$|f(x,y) - \varphi(s)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'autre part si μ décrit la courbe C, P décrit une seconde courbe, intérieure complètement à C, et par suite sur cette courbe C, la continuité de $f(x,y)$ est uniforme ; on peut donc supposer h assez petit pour que P et P' soient eux-mêmes tellement voisins qu'on ait

$$|f(x,y) - f(x'y')| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Soit alors $M\mu$ un chemin fixe quelconque aboutissant en μ; $M(\xi,\eta)$ le point où il coupe $P'\mu'$; on aura:

$$f(\xi,\eta) - \varphi(s) = [f(\xi,\eta) - \varphi(s+h)] + [\varphi(s+h) - f(x,y)] + [f(x,y_1) - f(x,y)] + [f(x,y) - \varphi(s)]$$

Enfin on peut toujours supposer h assez petit pour que le point variable reste compris entre μ' et M'', puisque μ' tend vers μ, et P' vers P. — Dans ces conditions chacune des parenthèses conservera un module inférieur à $\frac{\varepsilon}{4}$ on aura alors

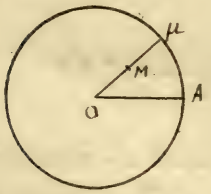
$$|f(\xi,\eta) - \varphi(s)| < \varepsilon$$

et par suite $f(\xi,\eta)$ tendra vers $\varphi(s)$ quand on suivra le chemin arbitraire considéré. La fonction prendra donc bien au point μ la valeur $\varphi(s)$

Remarque — La démonstration précédente suppose que le chemin spécial considéré μP, vient partout couper le contour extérieur sous un angle différent de 0 ou de π.

IV. Solution du problème dans le cas du cercle.

— Nous pouvons maintenant résoudre le problème de Dirichlet dans le cas d'un cercle de rayon R ayant l'origine pour centre. Soit θ l'angle $A0\mu$ qui fixe la fonction d'un point μ sur le cercle : $\varphi(\theta)$ la valeur que doit prendre la fonction au point μ; d'après ce qui précède nous devons supposer $\varphi(\theta)$ continue.



Développons $\varphi(\theta)$ en série de Fourier :

$$(1) \qquad \varphi(\theta) = \frac{a}{2} + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \quad + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta + \cdots$$

Nous avons vu que cette série est uniformément convergente, $\varphi(\theta)$ étant continue, entre $-\pi$ et $+\pi$. Considérons alors la série dont le terme général est

$$(2) \qquad u_n = \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

r étant le rayon vecteur d'un point M situé sur le rayon 0.

Prenons un nombre positif ε, il existe un entier p tel que la somme des termes qui suivent le $n^{ième}$ dans la série (1) ait un module $< \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n \geq p$. Il est clair qu'on aura à fortiori la même inégalité pour la série (2), en supposant r quelconque, mais inférieur à R. Soit alors $V(r)$ la somme de la

série (2) nous aurons, V_n étant la somme de n premiers termes:

$$V(r) - \varphi(\theta) = [V(r) - V_n(r)] + [V_n(r) - V_n(R)] + [V_n(R) - \varphi(\theta)]$$

Or n étant supposé égal ou supérieur à p, la première et la troisième parenthèses ont, quel que soit θ, un module moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$; nous pouvons alors trouver un nombre ρ tel que pour $R - r < \rho$ la seconde parenthèse ait ainsi un module moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, même quand on remplacera les sinus et les cosinus qui y figurent par des valeurs égales à $+1$ ou à -1; ρ se trouvera ainsi déterminé indépendamment de θ et on aura,

$$|V(r) - \varphi(\theta)| < \varepsilon$$

en d'autres termes la fonction V tend uniformément vers $\varphi(\theta)$ quand r tend vers R, c'est à dire quand on se dirige vers le point μ en suivant le rayon vecteur $o\mu$. On en conclut que cette fonction $V(r)$ ou $V(x, y)$ qui est évidemment uniforme et continue dans le cercle, prend sur la circonférence la suite de valeurs $\varphi(\theta)$.

Pour démontrer qu'elle résout le problème de Dirichlet il suffit de faire voir que $\Delta V = 0$. Or posons

$$v_n = (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \qquad W_n = u_n + i\, v_n$$

nous aurons

$$W_n = a_n(\cos n\theta + i \sin n\theta)\frac{r^n}{R^n} + b_n(\sin n\theta - i\cos n\theta)\frac{r^n}{R^n}$$

ou

$$W_n = \frac{a_n - i b_n}{R^n} \cdot z^n$$

z étant l'affixe du point x, y. — Nous obtenons ainsi une série entière et il est facile de voir qu'elle converge dans le cercle R. En effet on a (1ère partie page 159)

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\theta)\cos n\theta\, d\theta \qquad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

et ces intégrales conservent évidemment des valeurs finies quand n augmente indéfiniment; donc la série (V_n) est convergente pour $r < R$, aussi bien que la série (u_n); donc enfin la série (W_n) est convergente. — Elle représente donc une fonction analytique et comme V est la partie réelle de cette série, on a bien $\Delta V = 0$. Cette fonction V satisfait donc bien au problème de Dirichlet.

V. Cas général — Quand l'aire est limité par un contour de forme quelconque, le problème de Dirichlet admet toujours une solution et une seule; c'est en cela que consiste le principe de Dirichlet. — Nous n'en donnerons pas la démonstration, qui a été établie en toute rigueur; mais il est interessant de montrer comment la question a été ramenée par Dirichlet

à une question de minimum

Si dans la relation

$$\iint_{(C)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{(c)} P dx + Q dy$$

nous faisons $Q = U \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $P = -U \dfrac{\partial U}{\partial y}$ il vient :

$$\iint_{(c)} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \iint_{(c)} U \Delta U\, dx\, dy = \int_c U \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dz\right)$$

Nous désignerons en général par $\Omega(U)$ la première intégrale double, qui est essentiellement positive et nous aurons

$$(1) \quad \Omega(U) = -\iint_{(c)} U \Delta U\, dx\, dy + \int_0 U D_n U\, ds$$

D_n étant toujours la dérivée prise suivant la normale intérieure.

Ceci posé, si U doit satisfaire au problème de Dirichlet et s'annuler sur le contour les deux intégrales du second membre disparaissent et on a $\Omega(U) = 0$ ce qui exige évidemment.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

U doit donc rester constante et comme cette fonction continue s'annule au contour elle doit être identiquement nulle.

Il résulte d'abord de là que si deux fonctions U, $U + \theta$ vérifient le problème de Dirichlet pour une même suite de valeurs sur le contour, elles doivent être identiques, leur différence θ devant alors le vérifier elle-même en s'annulant tout le long du contour. En d'autres termes, si le problème admet une solution il n'en admet qu'une.

En second lieu, si U est une solution, elle est, parmi les fonctions uniformes et continues qui forment sur le contour les valeurs considérées, celle qui rend minima l'intégrale Ω. On a en effet

$$\Omega(U + \theta) = \Omega(U) + \Omega(\theta) + 2\iint_{(c)} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) dx\, dy$$

ou, en intégrant par parties

$$\Omega(U + \theta) = \Omega(U) + \Omega(\theta) + 2\int_{(c)} \theta \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{dU}{\partial y} dx\right) - 2\iint_{(c)} \theta \Delta U\, dx\, dy$$

Or θ s'annulant sur le contour l'intégrale curviligne disparait l'intégrale double s'annule à cause de $\Delta U = 0$. Donc enfin

$$\Omega(U + \theta) - \Omega(U) = \Omega(\theta)$$

Le second membre étant essentiellement positif, le minimum a lieu quand $\theta = 0$, ainsi que nous l'avons annoncé.

Dirichlet admettait comme certain que, parmi toutes les fonctions uniformes et continues qui prennent sur le contour de l'aire une suite de valeurs données, il y en a nécessairement une H qui rend minima l'intégrale Ω. — En admettant ce postulatum, qui n'est nullement évident, la démonstration du principe s'achève sans difficulté ; nous allons en effet prouver qu'on doit avoir $\Delta H = 0$.

En effet décrivons à l'intérieur de C un cercle K et désignons par A l'aire comprise entre ces deux contours. On a évidemment

$$\Omega_{(c)} = \Omega_{(A)} + \Omega_{(k)}$$

Or, dans le cercle K remplaçons la fonction H par la fonction $V(x, y)$ qui satisfait au problème de Dirichlet et qui prend sur la circonférence les mêmes valeurs que H ; laissons d'ailleurs intacte cette fonction H dans l'aire A ; nous constituons ainsi dans l'aire totale une fonction H_1 uniforme et continue et nous aurons

$$\Omega_{(c)}(H_1) - \Omega_{(c)}(H) = \Omega_{(k)}(V) - \Omega_{k}(H)$$

Or si V était différent de H dans le cercle, le second membre serait négatif, puisque V est harmonique ; donc $\Omega_{(c)}(H_1)$ serait inférieur à $\Omega_{(c)}(H)$, contrairement à l'hypothèse ; donc H doit, dans le cercle, coïncider avec V et par suite vérifier la condition $\Delta V = 0$. Il est clair que cela doit, dès lors, avoir lieu dans toute l'aire (C) puisqu'on peut faire varier arbitrairement le rayon et le centre du cercle K.

Comme nous l'avons dit plus haut, le principe de Dirichlet a été démontré en toute rigueur et indépendamment de tout postulatum.

Remarque. — Ainsi que nous l'avons remarqué, une fois U connu, la fonction complémentaire V pourra être déterminée à une constante près. On pourra donc, d'une manière unique, trouver une fonction analytique dans une aire donnée, dont la partie réelle prenne sur le contour, une suite de valeurs assignées d'avance, la partie imaginaire prenant une valeur donnée, en un point choisi arbitrairement sur le contour.

Sixième Leçon.

Propriétés des Fonctions méromorphes.

I. Série de Mac Laurin. — Supposons que la fonction $f(z)$ soit holomorphe dans une aire A contenant le point 0. Si x désigne l'affixe d'un point intérieur à cette aire, et C un contour contenu lui-même dans A, et comprenant le point x, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

D'ailleurs la fraction $\frac{1}{z-x}$ peut s'écrire

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

Si on substitue ce développement à $\frac{1}{z-x}$ sous le signe d'intégration, on aura pour $f(x)$

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{n-1}x^{n-1} + R_n.$$

en posant

$$(2) \qquad A_p = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz \qquad R_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)\,x^n}{(z-x)\,z^n}\,dz$$

Supposons qu'on ait pris pour C un cercle de rayon R ayant 0 pour centre. Si M est le module maximum de $f(z)$ sur la circonférence, r, le module de x, la fonction soumise à l'intégration dans R_n a un module moindre que $\frac{M}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^n$. On a donc, le contour ayant pour longueur $2\pi R$:

$$|R_n| < \frac{MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

Comme $\frac{r}{R} < 1$, on en conclut que R_n tend vers zéro lorsque n croit indéfiniment, en d'autres termes, la série entière

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots\dots + A_n x^n + \dots\dots$$

est convergente et a pour somme $f(x)$. Si on y remplace A_p par son expression (2), on a :

$$(3) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{1.2..n} f^{(n)}(0) + \dots$$

à cause de la formule de Cauchy démontrée précédemment

$$f^{(p)}(0) = \frac{1.2\dots p}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz$$

La formule (3) à laquelle nous donnerons, par une extension toute naturelle le nom de série de Mac Laurin, est valable pour tous les points intérieurs à un cercle C' parfaitement déterminé, ayant pour centre O et passant par le point singulier de $f(z)$ le plus rapproché du point O. Il est d'ailleurs bien clair qu'il est inutile de chercher à prolonger au delà de ce cercle un pareil développement, car toute série entière convergente en un point extérieur à C' aurait pour somme une fonction holomorphe pour toutes les valeurs de module moindre et par suite ne saurait représenter $f(z)$ qui cesse d'être holomorphe pour une au moins de ces valeurs.

Série de Taylor. — Soit a un point quelconque où $f(z)$ soit holomorphe; décrivons de a comme centre un cercle ne contenant aucun point singulier; x étant l'affixe d'un point intérieur, si nous posons:

$$z = a + \zeta \quad , f(z) = f(a+\zeta) = \varphi(\zeta) \quad , x = a + \xi$$

la fonction φ sera développable par la série de Mac Laurin, et nous aurons:

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) + \frac{\xi}{1}\varphi'(0) + \dots\dots + \frac{\xi^n}{1.2\dots n}\varphi^{(n)}(0) + \dots\dots$$

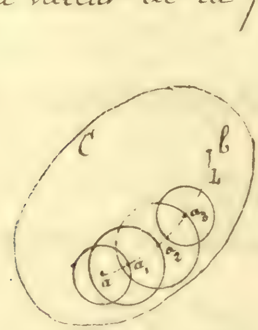
D'où, en remplaçant ξ par $x-a$, et tenant compte de la relation:

$$\varphi^{(p)}(0) = f^{(p)}(a)$$

$$(4) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots\dots + \frac{(x-a)^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(a) + \dots\dots$$

C'est la série de Taylor, et le domaine du point a, dans lequel elle est valable, est un cercle ayant a pour centre, et s'étendant exclusivement, jusqu'au point singulier le plus voisin de a.

II. Calcul de la fonction de proche en proche. — La formule (4), bien que limitée à un domaine restreint autour du point a, peut servir à calculer la fonction en un point b quelconque, pourvu qu'on connaisse en a la valeur de la fonction et de chacune de ses dérivées. Relions en effet les points a, b par un chemin quelconque L ne passant par aucun point singulier.



Décrivons de A comme centre un cercle ayant un rayon inférieur à la plus courte normale menée de a au contour C. Ce cercle coupera L en un point a_1 et nous aurons le moyen de calculer à l'aide de la formule (4) et de ses dérivées, les valeurs de la fonction et de toutes ses dérivées au point a_1. Du point a_1, nous passerons de même, à l'aide d'un second cercle au point a_2, plus rapproché du point b à l'aide de la formule

$$f(a_2) = f(a_1) + \frac{a_2 - a_1}{1} f'(a_1) + \dots\dots + \frac{(a_2-a_1)^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(a_1) + \dots\dots$$

Il est clair qu'on arrivera, ainsi après un nombre limité d'opérations, à un dernier cercle qui englobera le point b et dans lequel on devra appliquer une dernière fois la série de Taylor.

Remarque. — Si, au point a, toutes les dérivées sont nulles, il est clair que la formule (4) donnera $f(a_1) = f(a)$ et que la $n^{ième}$ série dérivée donnera de même $f^{(n)}(a_1) = f^{n}(a) = 0$; qu'il en sera de même en a_2 puis en a_3 et enfin en b. On aura donc $f(b) = f(a)$, et on est ainsi conduit au théorème suivant :

Théorème. — Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans une aire donnée, et si toutes ses dérivées sont nulles en un point particulier de cette aire, la fonction conserve, dans l'aire, une valeur constante.

Supposons que la fonction conserve une valeur constante le long d'une aire finie ab, si M est un point quelconque de cet arc, un cercle de rayon ρ décrit de M comme centre coupera ab en un autre point M' où la valeur de la fonction sera la même qu'en M. On aura donc $f(z') - f(z) = 0$. Si ρ diminue indéfiniment, le point M' se rapprochera de M et il est évident que la dérivée $f'(z)$ suivant la direction ab sera nulle; comme la fonction est analytique, on aura au point M, $f'(z) = 0$. Donc $f'(z)$ sera constant tout le long de ab; donc $f''(z)$ sera nul et par suite constant le long de ce même arc et ainsi de suite. Donc, en un point quelconque de ab, toutes les dérivées seront nulles; la fonction se réduira donc à une constante dans l'aire tout entière; donc enfin :

Théorème. — Si une fonction, holomorphe dans une aire donnée, reste constante le long d'une ligne finie, aussi petite d'ailleurs que l'on voudra, elle est constante dans l'aire tout entière.

III. Zéros d'une fonction holomorphe.

— Un zéro de $f(z)$ est un point où $f(z)$ s'annule; d'après ce qui précède il y a en moins une dérivée qui ne s'annule pas en ce point a, et p étant l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas, on a, dans le domaine du point a:

$$f(z) = (z-a)^p \left[\frac{f^{(p)}(a)}{1.2\ldots p} + \frac{z-a}{1.2\ldots(p+1)} f^{(p+1)}(a) + \ldots\ldots\right] = (z-a)^p f_1(z) \qquad (f_1(a) = 0)$$

D'après cela, le rapport $\frac{f(z)}{(z-a)^p}$ est holomorphe dans le domaine du point a, et différent de zéro. Le nombre p s'appelle le degré de de multiplicité du zéro a.

La parenthèse, considérée à partir de son second terme, est une fonction continue dans le domaine de a et qui s'annule pour $z = a$. On peut donc décrire de a comme centre, un cercle de rayon ρ assez petit pour que cette fonction ait, dans ce cercle, un module inférieur à $\frac{1}{1.2\ldots p} |f^{(p)}(a)|$. Dans ces conditions, il est clair que ce cercle ne contiendra aucun zéro de $f_1(z)$

et par suite aucun zéro de $f(z)$ autre que a. On exprime ce fait en disant que les zéros de $f(z)$ sont isolés les uns des autres ; nous allons voir qu'en outre ils sont en nombre fini dans l'aire S si nous supposons cette aire fermée.

En général, on nomme ensemble un système E de points

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

distribués dans le plan suivant une loi quelconque. On dit que cet ensemble est isolé si chacun de ses points peut être isolé de tous les autres par un cercle de rayon suffisamment petit. Il peut arriver qu'autour d'un point b du plan se groupent une infinité de points appartenant à E, de telle sorte que dans tout cercle, si petit qu'il soit, ayant b pour centre il y ait au moins un des points a. On est ainsi conduit à un nouvel ensemble E' composé de points limites $b_1\, b_2 \ldots\ldots b_n, \ldots$ et qu'on appelle l'ensemble dérivé de E.. Il est clair que E' peut admettre lui-même un ensemble dérivé E'' et ainsi de suite.

Pour donner un exemple simple, les zéros de $\sin \frac{\pi}{z}$ sont fournis par $z = \frac{1}{k}$; ils forment un ensemble infini de points isolés. Dans un cercle de rayon ρ décrit de l'origine comme centre il y a une infinité de zéros de $\sin \frac{\pi}{z}$, et cela quelque petit que soit ρ. L'ensemble considéré admet donc un ensemble dérivé qui se réduit ici au point 0.

Supposons qu'un ensemble infini E soit réparti dans une aire fermée S ou sur son contour, il est facile de voir qu'il y aura un ensemble dérivé contenu dans la même aire. En effet, entourons S d'un rectangle R parallèle aux axes. Si nous divisons R en quatre rectangles égaux, l'un au moins contiendra une infinité de points de l'ensemble E ; soit R_1 ce rectangle ; divisons-le en quatre autres égaux ; l'un au moins de ceux-ci, R_2, contiendra une infinité de ces mêmes points, et ainsi de suite indéfiniment ; or le centre du rectangle R_n tend, ainsi que nous l'avons vu à plusieurs reprises, vers un point b parfaitement déterminé, et situé évidemment dans S ou sur son contour. Il y aura donc au moins un point limite, ainsi que nous l'avions dit.

Revenons à la fonction $f(z)$ holomorphe dans une aire A ; si C est une courbe fermée complètement intérieure à A le nombre des zéros situés sur C ou dans son intérieur est nécessairement limité. En effet, s'il en était autrement, ces zéros formeraient un ensemble ayant au moins un point limite b ; à cause de la continuité, on aurait nécessairement $f(b) = 0$; il y a là une contradiction, car en qualité de zéro, b doit pouvoir être isolé de l'ensemble de tous les autres ; donc il ne saurait faire partie de l'ensemble dérivé.

Ainsi les zéros seront en nombre limité et chacun d'eux sera d'un

degré fini de multiplicité. Il est clair que tout ce qui précède s'étend immédiatement aux points où $f(z)$ prend une valeur déterminée quelconque c. — Ces points sont en effet les zéros de la fonction holomorphe $f(z)-c$.

IV. — Fonctions méromorphes dans une aire donnée.

Nous avons défini (II page 11) ce qu'on entend par fonction méromorphe; c'est une fonction qui n'admet d'autre singularité que des pôles; un pôle est d'ailleurs un point où $f(z)$ devient infini, la fonction $\frac{1}{f(z)}$ étant holomorphe en ce même point.

Observons qu'un zéro de $f(z)$ doit pouvoir être isolé de tout pôle par un cercle de rayon fini, d'après la définition même de la continuité. — Nous supposons $f(z)$ méromorphe dans une aire donnée S. Soit alors a un zéro; décrivons de a comme centre un cercle C intérieur à S et ne contenant aucun pôle; $f(z)$ sera holomorphe dans C; donc le zéro a est isolé de tout autre zéro contenu dans C, et à fortiori de tout zéro qui serait extérieur à C. De plus chaque zéro sera d'un ordre fini de multiplicité, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel qu'on ait $f(z)=(z-a)^p f_1(z)$, $f_1(z)$ ne s'annulant pas en a et étant holomorphe dans le domaine de ce point; enfin ces zéros seront en nombre limité.

Considérons maintenant $\frac{1}{f(z)}$ c'est une fonction méromorphe ayant comme zéros les pôles de $f(z)$; d'après ce que nous venons de voir les zéros sont en nombre limité, isolés les uns des autres; en outre à tout pôle b, correspond un entier q fini et tel qu'on ait

$$\frac{1}{f(z)}=(z-b)^q\varphi(z)$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe et différent de zéro dans le domaine de b; la fonction $\psi=\frac{1}{\varphi}$ sera donc holomorphe dans le même domaine et ne s'annulera pas pour $z=b$; on aura donc:

$$f(z)=(z-b)^{-q}\psi(z)$$

$\psi(b)$ n'étant ni nul ni infini; nous exprimerons ce fait en disant que b est un pôle de degré q.

Ordre d'une fonction méromorphe. — En chaque point x de S, la fonction $f(z)$ peut être mise sous la forme:

$$f(z)=(z-x)^\mu f_1(z)$$

μ étant entier et la fonction $f_1(z)$ n'étant ni nulle ni infinie. Si x n'est ni zéro ni un pôle, $\mu=0$, si x est un zéro, μ est positif, si c'est un pôle, μ est négatif. — Ce nombre entier μ est ce qu'on appelle l'ordre de $f(z)$ au point considéré. — Il est évident que l'ordre d'un produit de fonctions est égal en chaque point à la somme des ordres de ses facteurs.

Remarquons aussi que l'ordre de $f(z)$ en chaque zéro ou pôle,

est égal à $\mu - 1$; on a en effet :

$$f'(z) = (z-x)^{\mu-1}[\mu f_1(z) + (z-x)f_1'(z)]$$

et comme $f_1(x)$ 0, l'ordre de $f'(z)$ est bien égal à $\mu - 1$; si μ est nul, on ne peut rien affirmer quant à l'ordre de $f'(z)$

V. – Expression analytique des fonctions méromorphes dans une aire donnée.

— 1°. – Si deux fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ sont méromorphes dans une même aire S et ont même ordre en chaque point, le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ sera d'ordre nul en chaque point ; donc ce sera une fonction holomorphe et sans aucun zéro dans S ; son logarithme népérien sera par suite holomorphe dans la même aire S ; on aura donc

$$f(z) = \varphi(z)\, e^{F(z)}$$

$F(z)$ étant holomorphe dans S. Soient maintenant $a_1\ a_2 \dots a_p$ les zéros de $f(z)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ leurs degrés de multiplicité ; $b_1, b_2, \dots b_q$, les pôles, $\beta_1\ \beta_2 \dots \beta_q$ leurs degrés ; la fonction rationnelle

$$\frac{(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\dots\dots(z-a_p)^{\alpha_p}}{(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2}\dots\dots(z-b_q)^{\beta_q}}$$

est partout de même ordre que $f(z)$; on aura donc :

$$(5) \qquad f(z) = \frac{(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\dots\dots(z-a_p)^{\alpha_p}}{(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2}\dots\dots(z-b_q)^{\beta_q}}\, e^{F(z)}$$

$F(z)$ étant holomorphe dans l'aire S. C'est là une première expression analytique de $f(z)$. Dans le cas où $f(z)$ est holomorphe, cette expression correspond à la décomposition d'un polynome entier en facteurs linéaires.

2°. – La fonction $f(z)$ méromorphe dans S, est susceptible d'une autre expression analytique non moins importante, et qui met en évidence la manière d'être de la fonction dans le domaine de chaque pôle. – Soit b un pôle de degré β, en sorte qu'on ait dans le domaine de b :

$$f(z) = (z-b)^{-\beta} f_1(z).$$

Developpons $f_1(z)$ qui est holomorphe, suivant les puissances ascendantes de $z-b$; nous avons :

$$f(z) = (z-b)^{-\beta}[A_0 + A_1(z-b) + A_2(z-b)^2 + \dots\dots]$$

$$\text{ou} \qquad f(z) = \frac{A_0}{(z-b)^{\beta}} + \frac{A_1}{(z-b)^{\beta-1}} + \dots\dots + \frac{A_{n-1}}{z-b} + F(z)$$

$F(z)$ étant holomorphe dans le domaine de b ; la fraction rationnelle s'appelle la fonction caractéristique de $f(z)$, relative au pôle b ; le coefficient A_0 est essentiellement différent de zéro car il a pour valeur

$f_1(b)$; enfin A_{n-1} s'appelle le résidu de $f(z)$ au point b.

Soient alors $b_1\, b_2 \ldots b_q$ les pôles de $f(z)$ dans l'aire S, $R_1\, R_2 \ldots R_q$ les fonctions caractéristiques correspondantes, la fonction

$$\varphi(z) = R_1 + R_2 + \ldots + R_q$$

peut être considérée en elle-même et indépendemment des pôles de $f(z)$; la différence $f(z) - \varphi(z)$ est méromorphe dans S ; elle ne peut avoir d'autres pôles que les b ; d'ailleurs dans le voisinage d'un point b_j, $f(z) - R_j$ et $\varphi(z) - R_j$ sont l'une et l'autre holomorphes ; donc il en est de même de $f(z) - \varphi(z)$. Donc enfin cette différence est holomorphe dans l'aire entière et on peut écrire :

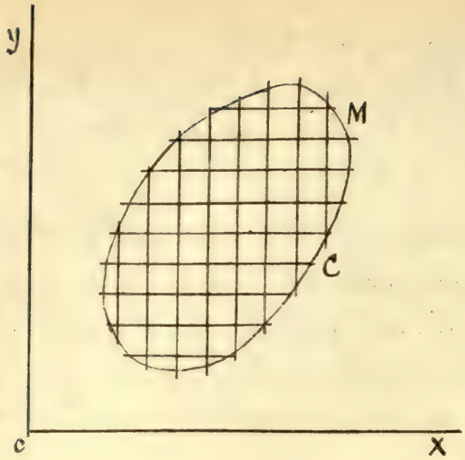
$$(6) \qquad f(z) = \sum \left[\frac{A_0}{(z-b)^\beta} + \frac{A_1}{(z-b)^{\beta_1}} + \ldots + \frac{A_{\beta-1}}{z-b} \right] + F(z)$$

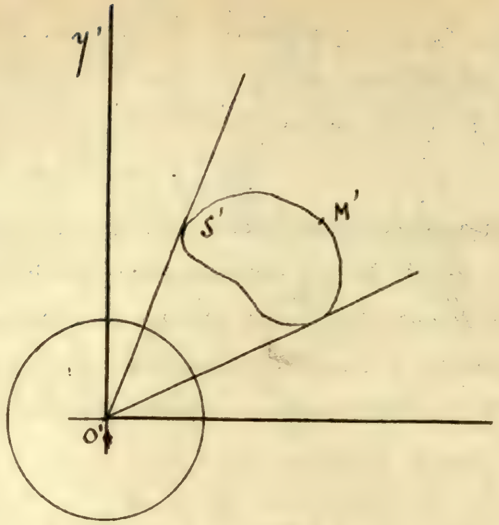
$F(z)$ étant holomorphe dans l'aire S. Cette nouvelle expression analytique de $f(z)$ correspond exactement à la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples.

VI. Somme des ordres dans une aire donnée. — Supposons que le point M qui représente z décrive une fois et une seule dans le sens direct le contour de l'aire S ; lorsque M sera revenu à son point de départ, le point M' qui représente $f(z)$ aura de son côté décrit une courbe fermée, puisque $f(z)$ est uniforme. En d'autres termes le module de $f(z)$ aura repris la même valeur, mais l'argument aura varié de $2k\pi$, k étant un nombre entier ; nous allons montrer que ce nombre k est égal à la somme des ordres de $f(z)$ dans l'aire S.

Nous supposerons que le contour C de S ne passe par aucun zéro ni pôle de $f(z)$, sinon la courbe C' viendrait passer au point O et l'argument de $f(z)$ varierait brusquement de π, et le point M' pourrait, après un tour complet de M, ne pas revenir à son point de départ. Observons maintenant que si M parcourt deux fois de suite un même chemin dans deux sens opposés, le nombre k correspondant est nécessairement nul, puisque M' doit après avoir décrit un certain arc revenir à son point de départ en repassant par les mêmes positions. — Il résulte de là, en vertu d'un raisonnement que nous avons déjà fait à plusieurs reprises, que si l'on coupe C par une transversale ne rencontrant aucun zéro ni pôle, la valeur de k correspondant au contour de l'aire totale est égale à la somme des valeurs de k qui correspondent aux contours des aires partielles ; nous allons montrer d'abord que si C ne contient aucun zéro ni aucun pôle, k est nul.

En effet, puisque $f(z)$ ne s'annule ni sur C ni dans son intérieur cette fonction conserve pour tous ces points un module supérieur à un





nombre déterminé δ. Si du point O' comme centre, nous décrivons un cercle C' de rayon δ, le point M' ne pourra jamais pénétrer à l'intérieur de ce cercle; nous pouvons maintenant, puisque $f(z)$ est uniformément continue dans l'aire C et sur son contour, décomposer cette aire en un nombre fini de carrés, complètement intérieurs au contour ou écornés par le contour, et tels que M décrivant le périmètre de l'un quelconque d'entre eux, M' décrive une courbe d'aire inférieure à $\pi\delta^2$. Soit S' l'une de ces courbes, il est évident qu'elle ne peut envelopper l'origine O' puisqu'elle devait alors entourer le cercle C' dont l'aire est supérieure à la sienne; le rayon vecteur $O'M'$ reviendra donc à sa position initiale après avoir oscillé entre les tangentes extrêmes menées de O' à S'; et la variation de l'argument de $f(z)$ sera égale à 0. Cela ayant lieu pour le contour de chacun des carrés, le nombre k sera nul pour le contour C de l'aire totale, puisque le nombre des carrés est limité.

Soit maintenant a un point de l'intérieur de C; prenons d'abord la fonction particulière $f(z) = (z-a)^n$. — Si nous décrivons un cercle C_1 ayant a pour centre, et intérieur à C, $f(z)$ n'aura aucun zéro dans l'aire comprise entre C et C_1. Relions C_1 à C par une traverse H et désignons par $2k\pi$, $2k_1\pi$, h les variations d'argument correspondantes aux courbes C, C_1, H; nous aurons d'après ce qui précède:

$$2k\pi + h - 2k_1\pi - h = 0$$

$$\text{d'où} \quad k = k_1$$

Mais k_1 se calcule aisément. Si nous posons

$$z = a + \rho e^{\theta i} \quad f(z) = \rho^n e^{n\theta i}$$

comme l'argument de $f(z)$ est égal à $n\theta$, quand θ aura varié de 2π, c'est-à-dire quand M aura parcouru une fois C_1 dans le sens direct, l'argument

de $f(z)$ aura varié de $2n\pi$. On a donc enfin $k_1 = n$, d'où $k = n$ (n peut être positif ou négatif)

Passons enfin au cas d'une fonction méromorphe dans S. La formule (ρ) nous fournit $f(z)$ sous forme d'un produit dont l'argument est égal à la somme des arguments des facteurs. La variation de l'argument total est donc égale à la somme des variations correspondantes aux différents facteurs. Or le dernier facteur $e^{F(z)}$ n'ayant aucun zéro ni pôle dans C donne lieu à une variation nulle de l'argument; $(z-a_i)^{\alpha_i}$ donne une variation égale à $2\alpha_i\pi$, la variation totale étant $2k\pi$, on a par conséquent

$$k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_p - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_q$$

ce qui démontre le théorème énoncé:

Théorème. — La variation totale de l'argument de $f(z)$ quand z décrit une fois et une seule, dans le sens direct, un contour ne passant par aucun zéro, est égale à 2π multiplié par la somme des ordres de $f(z)$ dans l'aire considérée.

VII — Fonctions entières. — Fonctions fractionnaires. —

Une fonction $f(z)$ est dite entière, par analogie avec les polynômes entiers, quand elle est holomorphe dans un cercle de rayon R aussi grand que l'on veut; elle est dite fractionnaire par analogie avec les fractions rationnelles quand elle est méromorphe dans un cercle de rayon R aussi grand que l'on veut. — Pour connaître complètement une telle fonction, il est nécessaire de savoir ce qu'elle est au point ∞; nous avons déjà dit que si $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ admet le point 0 comme singularité, le point ∞ est par définition une singularité de même nature pour $f(z)$. Ainsi ce sera un pôle de degré p si on a, dans le domaine de 0, et posant $z = \frac{1}{\zeta}$

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{A}{\zeta^p} + \frac{A_1}{\zeta^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{\zeta} + \varphi(\zeta)$$

$\varphi(\zeta)$ étant holomorphe pour $\zeta = 0$. On aura donc pour de très grandes valeurs de z

$$f(z) = Az^p + A_1 z^{p-1} + \ldots + A_{p-1} z + \psi(z)$$

$\psi(z)$ ne devenant pas infini avec z. Le polynome mis en évidence sera dans le cas actuel la fonction caractéristique du point ∞, et l'ordre de la fonction à l'infini sera $-p$.

Théorème de Liouville. — Toute fonction entière qui conserve un module fini, quelque soit z, se réduit à une constante.

Remarquons en effet que pour une fonction entière, la série de MacLaurin s'applique, quelque grand que soit le rayon R du cercle dans lequel on a fait le développement. Or, on a, p étant un entier

donné positif,

$$f^{(p)}(0) = 1.2\ldots p \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz$$

l'intégrale étant prise le long de ce cercle. Par hypothèse $|f(z)|$ reste inférieur à un nombre fixe M indépendant de R; donc le module de l'intégrale est inférieur à $2\pi R \cdot \frac{M}{R^{p+1}}$. On a donc :

$$|f^{(p)}(0)| < 1.2\ldots p \frac{M}{R^p}$$

et comme R peut être pris aussi grand qu'on voudra, $f^{(p)}(0)$ est nul; donc tous les termes de la série de Mac Laurin sont nuls à partir du second, et on a simplement $f(z) = f(0)$ ce qui démontre le théorème énoncé.

Il résulte de là qu'une fonction entière ne peut admettre le point ∞ comme point ordinaire car dans un cercle de rayon $\frac{1}{R}$, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ conserverait un module fini; hors du cercle de rayon R, il en serait de même de $f(z)$; donc enfin $|f(z)|$ serait fini pour toute valeur de z et se réduirait à une constante.

Voyons maintenant si le point ∞ peut être un pôle d'ordre p. — Nous avons vu qu'on a alors :

$$f(z) = Az^p + A_1 z^{p-1} + \ldots\ldots + A_{p-1} z + \psi(z)$$

$\psi(z)$ étant fini pour z infini; considérons alors

$$f(z) - Az^p - A_1 z^{p-1} - \ldots - A_{p-1} z.$$

Cette fonction est évidemment finie pour toute valeur finie de z; elle l'est d'après ce qu'on vient de dire pour z infini; donc elle se réduit à une constante A_p, et on a :

$$f(z) = Az^p + A_1 z^{p-1} + \ldots\ldots + A_{p-1} z + A_p.$$

Donc : toute fonction entière dont le point ∞ est un pôle se réduit à un polynôme entier.

Considérons maintenant le cas où $f(z)$ est fractionnaire, et où le point ∞ est un pôle ou un point ordinaire; le point 0 est un pôle ou un point ordinaire de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ et peut être isolé de tout autre pôle par un cercle de rayon ρ fini; si alors on revient à $f(z)$, elle n'aura qu'un seul pôle au plus en dehors du cercle de rayon $\frac{1}{\rho} = R$ décrit de 0 comme centre; $f(z)$ sera méromorphe dans ce cercle, et par suite ses pôles y seront en nombre limité; soient alors $R_1 R_2 \ldots R_p$, les fonctions caractéristiques correspondantes, et considérons la fonction

$$f(z) - R_1 - R_2 \ldots - R_p = \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ est holomorphe dans le cercle de rayon R; en dehors de ce cercle elle

n'admet qu'un pôle au plus: le point ∞; donc elle se réduit d'après ce qui précède, soit à une constante, soit à un polynôme entier; donc enfin $f(z)$ se réduit à une fraction rationnelle; d'où le théorème:

Théorème. — Toute fonction fractionnaire qui admet le point à l'infini comme pôle ou comme point ordinaire, se réduit à une fration rationnelle.

VIII. — Si nous supposons que M, image de z, décrive dans le sens direct, le cercle de rayon R, μ, image de ζ décrira dans le sens rétograde le cercle de rayon ρ, le point 0 étant le seul pôle ou zéro de $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ contenu dans ce cercle, la variation V de l'argument de $f(z)$ quand z parcourt le cercle de rayon R sera donc:

$$V = 2\,i\,\pi.\,p$$

Si d'ailleurs k est la somme des ordres à l'intérieur de ce cercle, on a: $V = 2ik\pi$; donc $k - p = 0$; de là ce théorème:

Théorème. — La somme des ordres d'une fonction rationnelle, pour toutes les valeurs finies ou infinies de z est égal à zéro.

C'est une généralisation de ce théorème que toute équation entière de degré m admet m racines.

Théorème de M.r Picard. — Nous énoncerons enfin, sans démonstration, un théorème très important dû à M.r Picard et relatif aux fonctions entières et transcendantes. (Mémoire sur les fonctions entières, Annales de l'E. N. 1880).

Théorème: — Lorsque $f(z)$ est une fonction entière et transcendante, l'équation $f(z) = a$ a une infinité de racines; il ne peut y avoir exception que pour une valeur au plus de la constante a.

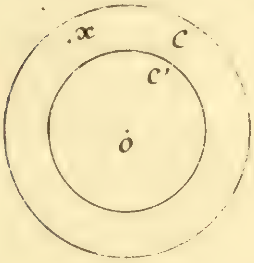
Remarquons seulement que ce théorème comprend celui de Liouville comme cas particulier; car a pouvant dépasser toute grandeur donnée, le module de $f(z)$ dépasse lui même toute grandeur donnée.

Septième Leçon.

Séries de Laurent et de Fourier. — Singularités des fonctions uniformes.

I. – Série de Laurent. – Le théorème de Cauchy appliqué à à la couronne comprise entre deux cercles C C′ ayant pour centre l'origine O va nous conduire à une nouvelle forme de développement. – Soit x l'affixe d'un point de la couronne, $f(z)$ une fonction holomorphe dans l'espace compris entre les deux cercles, on a :

$$2i\pi f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$



l'intégrale étant étendue au contour total de l'aire; cette intégrale se partage alors en deux autres, et on peut écrire :

$$(1) \qquad 2i\pi f(x) = \int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \int_{(c')} \frac{f(z)}{x-z}\,dz$$

Occupons-nous d'abord de la première intégrale; z reste sur le contour de c et par suite on a dans toute l'étendue des valeurs intégrées $\left|\frac{x}{z}\right| < 1$. Or

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\cdots + A_{n-1}x^{n-1} + R_n$$

en posant

$$(3) \qquad A_p = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz \qquad\qquad R_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{x^n}{z^n(z-x)} f(z)\,dz.$$

Passons à la deuxième intégrale; ici on a $\left|\frac{z}{x}\right| < 1$ pour toutes les valeurs de z situées sur c'. Nous aurons alors :

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \frac{z^2}{x^3} + \cdots\cdots + \frac{z^{m-1}}{x^m} + \frac{z^m}{x^m(x-z)}$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{x-z}\,dz = \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{B_m}{x^m} + S_m$$

en posant

$$(5) \qquad B_q = \frac{1}{2i\pi}\int z^{q-1} f(z)\,dz \qquad\qquad S_m = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^m}{x^m(x-z)} f(z)\,dz.$$

On reconnait immédiatement, par un raisonnement déjà fait et que nous ne répèterons pas ici, que si n et m croissent indéfiniment, R_n, S_m tendent vers 0; chacune des deux intégrales de l'équation (1) se développe par suite en une série convergente, et on a :

$$(6) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots\dots + A_n x^n + \dots\dots$$
$$+ \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots\dots\dots + \frac{B_m}{x^m} + \dots\dots\dots$$

$f(x)$ est donc développée en une série ordonnée par rapport aux puissances positives et négatives de x. Cette forme de développement a été donnée par le commandant Laurent. Les formules (3) et (5) donnent les valeurs des coefficients.

Ainsi dans la couronne considérée, on peut écrire :

$$(7) \qquad f(z) = F(z) + \varphi\left(\frac{1}{z}\right) \quad .$$

$F(z)$ est une série entière convergente à l'intérieur du cercle C, $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ est une série entière convergente pour toutes les valeurs de z extérieures à C qui ne contient pas de terme indépendant de z. En général, si d'un point quelconque a, on décrit des cercles C et C' comprenant entre eux une couronne dans laquelle $f(z)$ soit holomorphe, on aura pour tout point situé entre ces deux cercles :

$$f(z) = F(z-a) + \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

F et φ désignant des séries entières dont la seconde n'a pas de terme constant.

II – Série de Fourier. –

Avant de développer les conséquences très-importantes du théorème de Laurent, nous en déduirons, par une transformation simple, une forme particulière de développement pour les fonctions périodiques.

Si nous posons $\qquad u = e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$

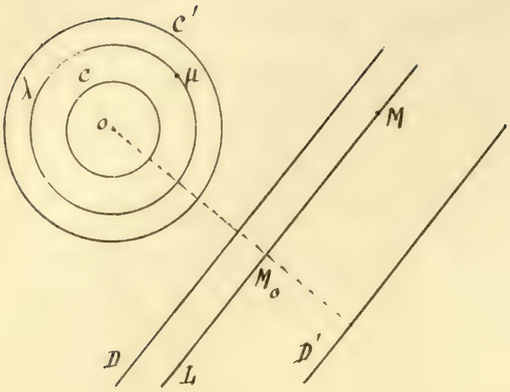
quand z augmente de 2ω, u se reproduit, en d'autres termes, u admet la période 2ω. – Imaginons que M, image de z, se déplace dans l'intérieur de la bande formée par deux droites indéfinies D, D', parallèles à la période 2ω; cherchons comment se déplace l'image de μ de u. Faisons décrire à z une droite L parallèle à la période; on aura, M_0 étant un point fixe de la droite,

$$z = z_0 + l\,\omega$$

l étant une variable réelle, et

$$u = e^{\frac{i\pi z_0}{\omega}} e^{i\pi l} \quad \text{d'où} \quad |u| = \left|e^{\frac{i\pi z_0}{\omega}}\right| = C^{te}$$

donc μ se déplacera sur un cercle λ ayant le point O pour centre. – Si L se déplace parallèlement à elle-même de D en D', le cercle λ se



dilatera de manière à engendrer une couronne circulaire limitée par les deux cercles C et C' qui correspondent à D et D'.

Soit alors une fonction $f(z)$ holomorphe dans la bande DD'; posons $u = e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$. A chaque point u situé dans la couronne circulaire correspondra une suite de points z situés dans la bande DD'. Mais ces valeurs de z diffèrent entre elles par des multiples de 2ω, $f(z)$ aura une valeur unique et bien déterminée. En d'autres termes $f(z)$ sera une fonction uniforme de u; on voit immédiatement que cette fonction est continue et analytique; en résumé c'est une fonction holomorphe de u dans la couronne circulaire cc'. En lui appliquant le théorème de Laurent on obtient la proposition suivante:

Théorème. — Lorsqu'une fonction qui admet la période 2ω est holomorphe dans la bande limitée par deux droites parallèles, de même argument que cette période, on peut dans cette bande la représenter par une série dont les termes sont des puissances entières positives ou négatives de $e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$.

La série ainsi obtenue est la série de Fourier; on a:

$$(8) \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{n\pi z i}{\omega}}$$

Si on y réunit les deux termes

$$A_n e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} + A_{-n} e^{\frac{-n\pi z i}{\omega}}$$

et qu'on tiennent compte des formules

$$e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} = \cos\frac{n\pi z}{\omega} + i\sin\frac{n\pi z}{\omega} \qquad e^{\frac{-n\pi z i}{\omega}} = \cos\frac{n\pi z}{\omega} - i\sin\frac{n\pi z}{\omega}$$

on peut écrire la série de Fourier sous la forme:

$$(9) \qquad f(z) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi z}{\omega} + a_2\cos\frac{2\pi z}{\omega} + \cdots\cdots + a_n\cos\frac{n\pi z}{\omega} + \cdots$$
$$+ b_1\sin\frac{\pi z}{\omega} + b_2\sin\frac{2\pi z}{\omega} + \cdots + b_n\sin\frac{n\pi z}{\omega} + \cdots$$

III. — Points singuliers essentiels

— Revenons à la série de Laurent sous la forme (6) ou (7). — Si nous faisons décroître le rayon de cercle intérieur C', tant que la circonférence ne franchira aucun point singulier, la formule (6) sera applicable, et les valeurs des coefficients B fournies par les formules (5) ne varieront pas; si on franchit un point singulier, il

faudra immédiatement faire décroître la circonférence extérieure C pour le lui faire franchir également ; on aura alors une nouvelle couronne donnant lieu à un développement de Laurent et comprise entre deux cercles c, c'_1 ; les intégrales (3) et (5) qui fourniront les nouveaux coefficients seront prises les unes le long de c, les autres le long de C', et leurs valeurs seront en général modifiées, la fonction $f(z)$ n'étant pas holomorphe entre C' et C_1'. Ainsi chaque fois qu'on fera sortir un point singulier, on aura un nouveau développement de Laurent modifié à la fois dans la partie entière et dans la partie fractionnaire.

Supposons alors que le point 0, singulier ou non, soit isolé de tout point singulier, on arrivera finalement à une couronne contenue tout entière dans le domaine du point 0, et dont on pourra faire varier les deux rayons sans rien changer à la valeur des coefficients A, B ; on aura dans ce domaine.

$$f(z) = F(z) + G\left(\frac{1}{z}\right) \tag{10}$$

G étant ce que nous appellerons la fonction caractéristique du point 0. $G\left(\frac{1}{z}\right)$ étant convergente désormais dans un cercle de rayon aussi petit que l'on voudra, on en conclut que la fonction $G(\zeta)$ est holomorphe pour toutes les valeurs possibles de ζ ; donc c'est une fonction entière. — Ainsi la fonction caractéristique de $f(z)$ relative à un point isolé est une fonction entière de $\frac{1}{z}$. Cette fonction ne contient pas de terme indépendant de z. Il peut alors se présenter trois cas :

1° G se réduit à zéro. La série de Laurent, dans le domaine du point 0, se réduit à la partie entière, le point 0 est donc un point ordinaire.

2° G est un polynôme de la forme :

$$\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{B_p}{z^p}.$$

0 est alors un pôle de degré p.

3° G est une fonction entière et transcendante

$$\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{B_p}{z^p} + \cdots\cdots$$

Le point 0 est alors ce qu'on appelle un point singulier essentiel. Pour nous rendre compte de ce qui se passe dans le voisinage d'un pareil point, considérons la fonction.

$$\frac{1}{f(z) - \alpha}$$

α étant une constante arbitraire. Cette fonction a le point 0 comme

point singulier essentiel ; ce n'est pas en effet un point singulier ordinaire, sinon 0 serait un pôle de $f(z)-\alpha$ et par suite de $f(z)$; ce n'est pas un pôle car $f(z)-\alpha$ et par suite $f(z)$ serait holomorphe au point 0.
D'après cela, nous pourrons poser :

$$\frac{1}{f(z)-\alpha} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \cdots\cdots = \varphi(z) + G\left(\frac{1}{z}\right)$$

Décrivons autour de 0 un cercle de rayon ρ aussi petit qu'on voudra, on pourra choisir ρ assez petit pour avoir dans tout ce cercle $|\varphi(z)-A_0|<\varepsilon$, ε étant un nombre positif quelconque ; d'autre part, d'après le théorème de Liouville sur les fonctions entières, $G\left(\frac{1}{z}\right)$ devient infini avec $\frac{1}{z}$; il y a donc des valeurs de z dans le cercle de rayon ρ pour lesquelles $\left|G\left(\frac{1}{z}\right)+A_0\right| > \frac{1}{\varepsilon'}$; on aura alors pour ces valeurs de z

$$\left|\frac{1}{f(z)-\alpha}\right| > \frac{1}{\varepsilon'} - \varepsilon \qquad |f(z)-\alpha| < \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon\varepsilon'}$$

On en conclut que dans le voisinage du point 0, la fonction s'approche autant qu'on veut de toute grandeur donnée à l'avance. Ce genre d'indétermination caractérise les points singuliers essentiels. On peut en s'appuyant sur le théorème de Mr. Picard donner un résultat plus précis encore et démontrer que la fonction prend une infinité de fois, dans le voisinage d'un tel point, une valeur arbitraire α donnée. Il ne peut y avoir exception que pour deux valeurs au plus de α (Picard. Mémoire sur les fonctions entières.)

Par exemple, la fonction

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{z^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{z^n} + \cdots$$

est absolument indéterminée au point 0. — Elle peut prendre aux environs de ce point toutes les valeurs possibles, sauf la valeur zéro. On peut le vérifier aisément dans ce cas particulier ; on a en effet, en posant :

$$e^{\frac{1}{z}} = re^{\theta i} \qquad z = x+iy \qquad (r \neq 0)$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = Lr \qquad \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \theta + 2k\pi$$

Il existe évidemment une infinité de valeurs de k pour lesquelles le point ainsi déterminé est compris dans un cercle de rayon ρ décrit de l'origine comme centre et cela quelque petit que soit ρ.

IV. Autres singularités. — Dans l'étude des fonctions uniformes que nous avons à faire, nous nous limiterons au cas où il n'y a que des singularités isolées ; nous ne pourrons dès lors rencontrer à distance finie que des pôles ou des points essentiels, à chacun desquels sera attachée une fonction caractéristique de la forme $G\left(\frac{1}{z}\right)$ (G étant le symbole d'une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe dans tout le plan). Il est bon cependant de remarquer que ces singularités ne sont pas les seules qu'on pourrait rencontrer ; nous allons énumérer quelques uns des cas qui peuvent se présenter.

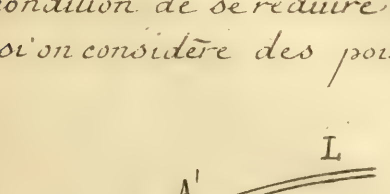
1° — *Points singuliers de classe supérieure.* — Lorsque les points singuliers de $f(z)$ formeront un ensemble infini E, il y aura à distance finie ou infinie, un ou plusieurs points limites constituant l'ensemble dérivé E'. — Chacun de ces points sera un point singulier puisqu'on ne pourra l'isoler de tout point singulier ; nous dirons que les points de E' sont des points singuliers essentiels de seconde classe. Nous avons vu par exemple que les zéros de $\sin\frac{1}{z}$ forment un ensemble ayant pour ensemble dérivé 0 ; ce point 0 est donc, pour la fonction $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, le point limite d'un ensemble de pôles ; c'est par suite un point singulier de seconde classe.

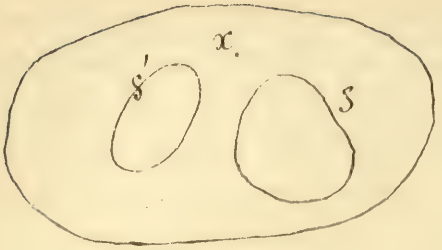
De même la fonction $\cot z$ admet une infinité de pôles donnés par par la formule $z = k\pi$; l'ensemble dérivés de ces valeurs de z se réduit au point ∞ ; le point ∞ est donc un point de seconde classe pour $\cot z$.

Il est clair que les points de seconde classe peuvent être en nombre infini ; les points limites correspondants seront des points de troisième classe, et ainsi de suite (Mittag-Leffler. Comptes rendus 1882).

Ajoutons qu'il existe des points singuliers qui ne rentrent pas dans la classification précédente.

2° *Lignes singulières*: — Il peut y avoir des lignes entières, le long desquelles la fonction cesse d'être holomorphe. Un premier exemple très simple est fourni par les coupures qui nous ont servi (page 16) à uniformiser les déterminations d'une fonction multiforme. Prenons par exemple la fonction $\sqrt{z}$; si nous introduisons une coupure indéfinie OL et la condition de se réduire à $+1$ pour $z=1$, la fonction $\sqrt{z}$ est uniforme. Or si on considère des points A, A' situés sur les deux bords opposés de la coupure et à la même distance du point O, il est évident que la fonction prend en ces deux points des valeurs égales et de signes contraires, bien que ces deux points soient infiniment voisins, donc chaque point de OL est un point de discontinuité et OL est une ligne singulière de notre fonction.





Le théorême de Cauchy fournit un autre exemple très remarquable ; soient des aires S, S' fermées, x un point du plan : $f(z), f_1(z)$ étant supposées holomorphes dans une aire Σ qui enveloppe les premières, si on pose :

$$F(x) = \int_{(S)} \frac{f(z)}{z-x}\, dz + \int_{(S')} \frac{f_1(z)}{z-x}\, dz$$

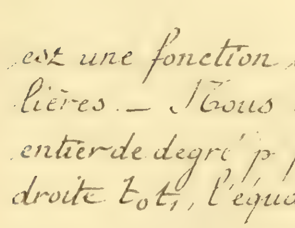
($F(x)$ sera une fonction ayant une valeur unique en chaque point de Σ c'est donc une fonction uniforme ; or cette fonction est nulle si x est en dehors des deux aires S et S' ; elle est égale à $2i\pi f(x)$ si x est dans S, à $2i\pi f_1(x)$ si x est dans S'. — Le long des lignes elles-mêmes elle cesse d'avoir un sens, la fonction à intégrer devenant infinie sur le contour d'intégration. Les lignes S, S' sont donc des lignes singulières de $F(x)$.

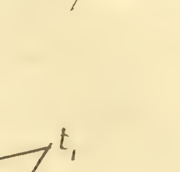
Nous mentionnerons encore un exemple de lignes singulières signalées par Mr. Hermite (Lettre à Mr. Mittag-Leffler) ; La démonstration suivante est due à Mr. Goursat (Acta. Mat. Tome I page 189)

Soient $G(z,t)$ $G_1(z,t)$ deux fonctions holomorphes des deux variables z, t ; l'intégrale rectiligne

$$F(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{G(z,t)}{G_1(z,t)}\, dt$$

est une fonction uniforme de z qui présente une ou plusieurs lignes singulières. — Nous nous contenterons d'examiner le cas où G_1 est un polynôme entier de degré p par rapport à z ; si on donne à t une valeur θ située sur la droite $t_0 t_1$, l'équation $G_1(z,t) = 0$ admet p racines $\zeta_1\ \zeta_2 \dots \zeta_p$; nous démontrerons que si θ se déplace d'une manière continue sur $(t_0 t_1)$ chacun des point ζ décrit un arc de courbe continue $(z_0 z_1)$; cette courbe est une ligne singulière, car en chacun de ses points (sauf ceux pour lesquels G et G_1 pourraient avoir une racine commune comprise sur $t_0 t_1$), l'intégrale cesse d'avoir un sens.





Cherchons quelle est la nature de la singularité. Soit ζ un point de la courbe, θ le point correspondant sur $(t_0 t_1)$; sur la normale prenons des points infiniment voisins et de part et

d'autre de ζ, $\zeta+\varepsilon$, $\zeta+\varepsilon'$. — Supposons, pour plus de netteté, que G_1 soit du premier degré par rapport à t ; à chaque valeur de ζ correspondra un point unique θ, tel que $G_1(\zeta,\theta)=0$. A des points $\zeta+\varepsilon$, $\zeta+\varepsilon'$ correspondront des points $\theta+\eta$, $\theta+\eta'$ infiniment voisins et séparés par le point θ. Nous pourrons en outre déterminer un point t_2 tel que dans le triangle $t_2\,t_1\,t_0$ l'équation $G_1(\zeta+\varepsilon,t)=0$ n'ait aucune autre racine que $\theta+\eta$; alors la fonction de t

$$\frac{G(\zeta+\varepsilon,t)}{G_1(\zeta+\varepsilon,t)}$$

n'aura, dans ce triangle qu'un seul pôle $\theta+\eta$; on pourra donc l'écrire :

$$\frac{G(\zeta+\varepsilon,t)}{G_1(\zeta+\varepsilon,t)}=\frac{H(\zeta+\varepsilon,t)}{t-\theta-\eta}$$

$H(\zeta,t)$ étant holomorphe par rapport à t dans le triangle ; appliquons le théorème de Cauchy au contour total $t_0\,t_1\,t_2$; nous aurons :

$$2i\pi H(\zeta+\varepsilon,\theta+\eta)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{G(\zeta+\varepsilon,t)}{G_1(\zeta+\varepsilon,t)}\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{G(\zeta+\varepsilon,t)}{G_1(\zeta+\varepsilon,t)}\,dt+\int_{t_2}^{t_0}\frac{G(\zeta+\varepsilon,t)}{G_1(\zeta+\varepsilon,t)}\,dt$$

les trois intégrales étant rectilignes. Si nous posons alors :

$$F_1(z)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{G(z,t)}{G_1(z,t)}\,dt \qquad F_2(z)=\int_{t_2}^{t_0}\frac{G(z,t)}{G_1(z,t)}\,dt$$

nous aurons :

$$2i\pi H(\zeta+\varepsilon,\theta+\eta)=F(\zeta+\varepsilon)+F_1(\zeta+\varepsilon)+F_2(\zeta+\varepsilon)$$

Si nous donnons au contraire à z la valeur $\zeta+\varepsilon'$, la fonction

$$\frac{G(\zeta+\varepsilon',t)}{G_1(\zeta+\varepsilon',t)}$$

n'aura aucun pôle dans le triangle $t_0\,t_1\,t_2$, elle sera donc holomorphe et nous aurons toujours à cause du théorème de Cauchy

$$0=F(\zeta+\varepsilon')+F_1(\zeta+\varepsilon')+F_2(\zeta+\varepsilon')$$

Retranchons :

$$F(\zeta+\varepsilon)-F(\zeta+\varepsilon')=2i\pi H(\zeta+\varepsilon,\theta+\eta)+F_1(\zeta+\varepsilon')-F_1(\zeta+\varepsilon)+F_2(\zeta+\varepsilon')-F_2(\zeta+\varepsilon)$$

Faisons enfin tendre ε et ε' vers 0 ; comme chacune des fonctions $F_1\,F_2\,H$ est holomorphe pour $z=\zeta$, on a :

$$\lim\left[F(\zeta+\varepsilon)-F(\zeta+\varepsilon')\right]=2i\pi H(\zeta,\theta)$$

Donc, quand on s'approchera d'un point de la ligne $(z_0\,z_1)$ la fonction $F(z)$ tendra vers une une valeur ou vers une autre suivant qu'on sera d'un côté ou de l'autre de cette coupure, et la différence des valeurs limites sera $2i\pi H(\zeta,\theta)$

3°. — Espaces lacunaires. — Enfin il peut arriver qu'une fonction cesse d'être holomorphe pour tous les points contenus dans une aire K ; cette

aire forme ce qu'on appelle un espace lacunaire. – Nous renverrons sur ce point au cours de M.r Hermite (4e édition pages 167 et s.)

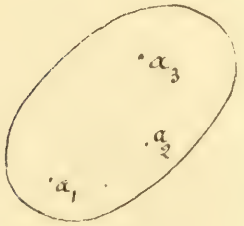
Il est bien entendu que nous nous limiterons au cas où la fonction ne cesse d'être holomorphe qu'en des points isolés, sauf à l'infini, la fonction ne pourra alors présenter, à distance finie que des pôles ou des points singuliers essentiels de 1ère classe.

V. – Théorie des résidus. – La fonction $f(z)$ dans le voisinage d'un point quelconque peut être mise sous la forme

$$f(z) = F(z) + \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \cdots\cdots$$

$F(z)$ étant holomorphe dans ce domaine, et la série étant convergente pour toute valeur de $z-a$. Le premier coefficient A_1 est appelé par Cauchy le résidu de $f(z)$ relatif au point a. Considérons une aire fermée dont le contour C ne passe par aucun point singulier, et cherchons la valeur de l'intégrale

$$J = \int_{(c)} f(z)\,dz$$



Soient $a_1, a_2 \ldots, a_p$ les points singuliers, en nombre nécessairement fini, contenus dans S, G_1 $G_2 \ldots G_p$ les fonctions caractéristiques correspondantes; la fonction

$$f(z) - G_1 - G_2 - \cdots\cdots - G_p$$

est évidemment holomorphe dans toute l'aire S; le raisonnement est le même que dans le cas où $a_1\ a_2 \ldots a_p$ seraient tous des pôles. – On a donc l'expression analytique suivante de $f(z)$

$$(11) \qquad f(z) = \varphi(z) + G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \cdots\cdots + G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right).$$

c'est la généralisation d'une formule donnée pour le cas des fonctions méromorphes.

On aura alors:

$$\int_{(c)} f(z)\,dz = \int_{(c)} \varphi(z)\,dz + \sum_{n=1}^{n=p} \int_{(c)} G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) dz$$

La première intégrale est nulle, $\varphi(z)$ étant holomorphe. Prenons maintenant une intégrale de la forme:

$$\int_{(c)} G\left(\frac{1}{z-a}\right) dz.$$

On peut écrire, $\psi(z)$ étant une fonction entière:

$$G\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{A}{z-a} + \frac{1}{(z-a)^2}\cdot\Psi\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

Faisons la substitution :

$$\frac{1}{z-a} = \zeta \qquad dz = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

on aura

$$\int_{(c)} G\left(\frac{1}{z-a}\right) dz = A\int_{(c)} \frac{dz}{z-a} + \int_{(c_1)} -\Psi(\zeta)\, d\zeta$$

c_1 étant la courbe transformée de C; la dernière intégrale du deuxième membre est nulle, $\Psi(\zeta)$ étant une fonction entière de ζ; quant à la première ; elle est égale à $2\pi i A$. On a donc en résumé le théorème suivant :

Théorème. — L'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long d'une courbe fermée dans l'intérieur de laquelle $f(z)$ n'a que des points singuliers isolés est égale à $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus correspondants.

Dans le cas particulier où $f(z)$ est méromorphe, la dérivée logarithmique $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est elle-même méromorphe ; elle admet comme pôles simples tous les zéros et tous les pôles de $f(z)$ et chaque résidu est égal à l'ordre correspondant. Si donc on applique à cette fraction le théorème précédent, on est conduit immédiatement à la proposition suivante :

Théorème. — La somme des ordres d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans une aire S, dont le contour C ne passe par aucun zéro ni aucun pôle, est égale à l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Il est aisé de voir que ce théorème ne diffère pas de celui que nous avons obtenu dans la dernière leçon. Si en effet, on pose :

$$f(z) = Re^{\theta i}, \text{ on a } \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = d.L\, r + i\, d\theta$$

On en conclut :

$$\int_{(c)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{(c)} d\, L\, R + i\int_{(c)} d\theta$$

dans le second membre la première intégrale est évidemment nulle, $L.R$ étant susceptible d'une seule et unique valeur en chaque point de C; quant à la seconde, elle est égale à la variation d'argument de $f(z)$ c'est-à-dire à $2k\pi$; on retombe ainsi sur le théorème donné dans la dernière leçon.

Comme application, nous démontrerons ici un théorème dont nous aurons besoin dans la suite :

Lemme. — Les deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ étant holomorphes dans l'aire

limitée par un contour fermé C, si le rapport $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ conserve un module inférieur à l'unité sur tout le contour, le nombre des zéros contenus dans cette aire sera le même pour les deux fonctions $f(z)$ et $f(z)+\varphi(z)$.

Si en effet on désigne par μ le nombre des zéros de (z) par μ_1 celui de $f(z)+\varphi(z)$, on a :

$$2i\pi(\mu_1-\mu)=\int_{(c)}\left\{dL\left[f(z)+\varphi(z)\right]-dL\,f(z)\right\}=\int_{(c)}d.\,\mathrm{Log.}\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$$

Comme $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$ sur le contour, la parenthèse ne s'annule en aucun point de C; le logarithme est donc une fonction uniforme le long de ce contour et l'intégrale est nulle ; on a donc

$$\mu_1=\mu$$

ce que nous voulions prouver. Remarquons que ce théorème est vrai dans le cas où f et φ seraient des fonctions méromorphes ; ce serait alors la somme des ordres qui serait égale pour les fonctions f et $f+\varphi$; il est clair qu'on supposerait alors que le contour C ne passe par aucun pôle ni aucun zéro des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$.

Voici maintenant le théorème que nous voulons démontrer :

Théorème. – Si la fonction $f(z)$ est uniforme dans tout le plan, et si l'équation $f(z)=b$ n'admet, quelque soit b, qu'un nombre limité de racines, $f(z)$ se réduit à une fraction rationnelle.

Supposons en effet que $f(z)=b$ n'admette jamais, quelque soit b, plus de p racines et supposons qu'elle en admette p pour une certaine valeur de b; je dis d'abord qu'elle en admettra toujours p. Soient en effet $z_1 z_2 \ldots z_p$ les racines de $f(z)=b$. Entourons les points correspondants de cercles $C_1\, C_2 \ldots C_p$, qui isolent chacun d'eux de tous les autres ; nous supposerons de plus que la fonction $f(z)-b$ ne s'annule sur aucune des circonférences $C_1\, C_2 \ldots C_p$. Soit δ le module minimum de $f(z)-b$ sur tous ces cercles, nous pourrons déterminer une quantité b' telle qu'on ait

$$|b'-b|<\delta$$

Mais alors si on pose :

$$F(z)=f(z)-b \quad \varphi(z)=b'-b$$

b n'aura, sur chacune des circonférences considérées

$$\left|\frac{\Phi(z)}{F(z)}\right|=\left|\frac{b'-b}{f(z)-b}\right|<\left|\frac{b'-b}{\delta}\right|<1$$

Donc les deux équations $f(z)=b$, $f(z)=b'$, auront le même nombre de racines dans chaque cercle C_i; le nombre total des racines, chacune étant comptée selon son degré de multiplicité, ne pourra donc pas changer quand on passera d'une valeur de b à une valeur infiniment voisine b', ni par

suite à une valeur quelconque.

Ceci posé, supposons que $f(z)$ admette un point singulier essentiel $\underline{a}$; traçons autour de $\underline{a}$ un cercle C qui l'isole des points $z_1 z_2 \ldots z_p$, où $f(z)$ prend la valeur b. Il est clair que a sera un point essentiel pour $\frac{1}{f(z)-b}$, il y aura donc certainement dans $\underline{C}$, au moins un point ζ tel que l'on ait (II, page 64):

$$\left|\frac{1}{f(\zeta)-b}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{d'où} \quad |f(\zeta)-b| < \varepsilon$$

Posons $f(\zeta) = b'$, nous aurons $|b'-b| < \varepsilon$; d'après ce qui précède l'équation $f(z) = b'$ aura, dans les cercles $C_1 C_2 \ldots C_p$, un nombre total de racines égal à p; mais il y aura en outre la racine $z = \zeta$, et elle est nécessairement distincte des autres, puisqu'elle est à l'intérieur de C. — Il y a là une contradiction avec ce que nous avons vu plus haut.

Donc la fonction ne peut avoir aucun point singulier essentiel à distance finie.

Si maintenant le point ∞ était un point essentiel, nous remplacerions le cercle C par un cercle C' décrit de l'origine comme centre et englobant $C_1 C_2 \ldots C_n$, nous arriverions à un résultat contradictoire comme tout à l'heure, ζ devant maintenant être extérieur à C'. — En résumé $f(z)$ ne pouvant avoir aucun point singulier essentiel ni à distance finie, ni à l'infini, sera une fonction rationnelle, ce qu'il fallait prouver. (II, page 59).

VI — **Théorème de Riemann** — Lorsque deux fonctions U et V sont uniformes dans une aire S, si elles coïncident le long d'un élément fini ab, elles coïncident dans l'aire tout entière.

Mr. Picard a donné de ce théorème la démonstration suivante: Isolons l'élément ab de tous les points singuliers de U ou de V en l'entourant d'une aire S'. La fonction $U-V$ est uniforme dans S, et holomorphe dans S'; d'ailleurs puisqu'elle est nulle le long de ab, elle est nulle dans l'aire S' tout entière. Ceci posé, faisons varier S' de telle sorte que son contour vienne passer très-près d'un point singulier $\underline{a}$ de U ou de V; cherchons ce que peut être a pour la fonction $U-V$. Si ce n'était pas un point ordinaire, ce ne pourrait être qu'un pôle ou un point singulier essentiel; dans l'un et l'autre cas, il y aurait dans le voisinage de a, au moins un point régulier z_0 pour lequel on aurait $|U-V| > A$, A étant un nombre positif arbitraire. — Or on pourrait englober ce point z_0 dans l'aire S' sans atteindre a. La fonction $U-V$ constamment nulle dans S' prendrait en z_0 une valeur de module supérieur à A; il y a là une contradiction; donc a n'est ni un pôle ni

un point essentiel de $U-V$; donc c'est un point ordinaire. Il en résulte que $U-V$ n'a aucun point singulier dans S. C'est donc une fonction holomorphe, et comme elle est nulle le long de ab elle est nulle dans l'aire entière.

Huitième Leçon.

Représentation analytique des fonctions uniformes.

I. _ Sur les séries uniformément convergentes. _

Nous avons obtenu précédemment sous diverses formes l'expression analytique d'une fonction, uniforme dans une aire donnée S où elle n'admet que des discontinuités polaires ou essentielles en nombre fini. Nous avons maintenant à chercher l'expression générale des fonctions uniformes qui admettent une infinité de singularités; pour cela nous avons besoin de certaines propriétés des séries dont les termes sont des fonctions de z, et nous devons d'abord compléter ce que nous avons dit des séries de cette nature.

Théorème I _ Lorsqu'une série

$$(1) \qquad f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots f_n(z) + \cdots$$

dont les termes sont holomorphes dans une aire S, converge uniformément dans cette aire, la série

$$(2) \qquad \int_{(AB)} f_1(z)\, dz + \int_{(AB)} f_2(z)\, dz + \cdots + \int_{(AB)} f_n(z)\, dz + \cdots$$

où les intégrales sont prises le long d'un même chemin AB complètement intérieur à S, est convergente et a pour somme

$$\int_{(AB)} f(z)\, dz.$$

Nous savons en effet que $f(z)$ est continue dans S. On peut donc intégrer cette fonction le long du contour AB. Or, soit I_μ l'intégrale de rang μ dans la série (2), on a:

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \int_{(AB)} S_n(z)\, dz.$$

S_n étant la somme des n premiers termes de la série (1). Cette série (1) étant uniformément convergente, si on se donne un nombre positif ε,

il existera un entier p tel que pour $n \geqslant p$ on ait, quel que soit z

$$f(z) - S_n(z) = \varphi_n(z)$$

$|\varphi_n(z)|$ étant moindre que ε; n étant déterminé de cette manière nous aurons :

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n - \int_{(AB)} f(z)\, dz = -\int_{(AB)} \varphi_n(z)\, dz.$$

Or, le second membre a un module inférieur à $l\varepsilon$, l étant la longueur du contour AB; donc la série (2) est convergente et a pour somme $\int_{(AB)} f(z)\, dz$, ce qu'il fallait prouver

Théorème II. — Soit une série convergente

$$(1) \qquad f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots\dots + f_n(z) + \dots\dots$$

dont les termes sont holomorphes dans l'aire S: si la série des dérivées:

$$(2) \qquad f'_1(z) + f'_2(z) + \dots\dots\dots + f'_n(z) + \dots\dots$$

est uniformément convergente dans l'aire S, $f(z)$ sera holomorphe et aura pour dérivée la somme de la série (2).

En effet, soit $\varphi(z)$ la somme de la série (2); les fonctions $f_1(z)$ ... $f_n(z)$, étant holomorphes dans S, il en sera de même de leurs dérivées, nous pourrons donc appliquer le théorème précédent à cette série (2), et nous aurons :

$$(3) \qquad \int_{(AB)} \varphi(z)\, dz = \int_{(AB)} f'_1(z)\, dz + \dots\dots + \int_{(AB)} f'_n(z)\, dz +$$

Si nous désignons par a, x, les affixes des points A, B, extrêmités du contour, nous aurons en général:

$$\int_{(AB)} f'_n(z)\, dz = f_n(x) - f_n(a)$$

et l'équation (3) pourra s'écrire :

$$\int_a^x \varphi(z)\, dz = f(x) - f(a)$$

D'où en dérivant les deux termes par rapport à x supposé variable

$$\varphi(x) = f'(x)$$

ce qui démontre le théorème.

A ces deux théorèmes, qui sont d'un usage continuel, nous ajouterons enfin le suivant qui se rattache d'une façon plus particulière au problème que nous nous sommes posé [1]

---

[1] P. Painlevé. — Lignes singulières des fonctions analytiques. — (page 11)

Théorème III. — Lorsqu'une série

$$(1) \qquad f_1(z) + f_2(z) + \cdots\cdots + f_n(z) + \cdots\cdots$$

a pour termes des fonctions holomorphes dans une aire S, et continues sur son contour, si cette serie converge uniformément sur le contour de l'aire.

1°. — Elle est convergente en tout point intérieur à S; et il en est de même de la série formée par les dérivées d'un même ordre quelconque.

2°. — La somme est holomorphe dans S, et sa dérivée d'ordre k, s'obtient en dérivant k fois les termes de la série (1)

Soit en effet, C le contour de l'aire; traçons un autre contour quelconque C' complètement intérieur à S et n'ayant aucun point commun avec C; soit x l'affixe d'un point pris à l'intérieur de C'; soit enfin δ la plus courte distance des deux contours C et C'. Lorsque la variable z décrira le contour C, on aura constamment $|z-x| < \delta$ et cette inégalité s'étendra à toutes les valeurs de x intérieures à C.

Ceci posé, la série (1) est par hypothèse, uniformément convergente le long de C; si on se donne un nombre positif ε, on pourra trouver un entier p tel que l'on ait pour $n \geqslant p$, et quel que soit q:

$$(2) \qquad |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots\cdots\cdots + f_{n+q}(z)| < \varepsilon$$

et cela quelle que soit la position de z sur C. Considérons alors la série:

$$(3) \qquad \int_{(c)} \frac{f_1(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz + \int_{(c)} \frac{f_2(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz + \cdots\cdots + \int_{(c)} \frac{f_n(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz + \cdots\cdots$$

Si nous représentons par $u_1\, u_2 \ldots\ldots u_n$ ses termes nous aurons:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots + u_{n+q} = \int_{(c)} \frac{f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots\cdots + f_{n+q}(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz$$

Mais à partir des valeurs de n que nous considérons, le numérateur de l'intégrale, quel que soit q, a un module moindre que ε, la fonction sous le signe $\int$ a donc un module moindre que $\frac{\varepsilon}{\delta^{k+1}}$. On a donc, quel que soit q:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots + u_{n+q}| < \frac{l\varepsilon}{\delta^{k+1}}$$

l étant la longueur du contour C. — On en conclut évidemment que la série (3) converge uniformément à l'intérieur de C'.

Or le terme de rang n dans cette série a pour valeur $\frac{2i\pi f_n^{(p)}(x)}{1.2.\ldots p}$. nous désignerons sa somme par $\frac{2i\pi\,\varphi_p(x)}{1.2.\ldots p}$, en sorte que nous aurons:

$$\varphi_p(x) = f_1^{(p)}(x) + f_2^{(p)}(x) + \cdots\cdots + f_n^{(p)}(x) + \cdots\cdots$$

Si en particulier, on fait $p=0$, $p=1$, on obtient les deux séries :

$$\varphi_0(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

$$\varphi_1(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x) + \dots$$

Si on reste dans le contour C', la dernière série étant uniformément convergente, a pour somme la dérivée de $\varphi_0(x)$ d'après le théorème précédent ; donc $\varphi_0(x)$ est holomorphe et a pour dérivée $\varphi_1(x)$. On voit alors de proche en proche que $\varphi_0^{(p)}(x) = \varphi_p(x)$, et le théorème est complètement démontré

II – Théorème de Mr. Mittag-Leffler[1] – Nous abordons maintenant le problème que nous nous sommes posé : trouver l'expression générale des fonctions uniformes qui n'ont, à distance finie que des discontinuités isolées. – Soient $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ les différents points singuliers de la fonction ; comme ils sont isolés, chacun d'eux est un pôle ou un point singulier essentiel de première classe ; en d'autres termes à chaque point a_p correspond une fonction caractéristique $G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right)$, G étant le symbole d'une fonction entière sans terme constant. Le théorème de Mr. Mittag Leffler peut s'énoncer ainsi :

Théorème – On peut toujours, étant donné un ensemble de points a_1 $a_2 \dots a_n \dots$ et une suite de fonctions entières $G_1\ G_2 \dots G_n \dots$ constituer une fonction uniforme $F(z)$ qui soit holomorphe dans tout le plan, en dehors des points $a_1 a_2 \dots a_n \dots$, et qui admette ces points comme points singuliers, chacun d'eux étant caractérisé par la fonction G correspondante

Le théorème est d'abord évident si le nombre des points a est fini et égal à p ; la fonction :

$$F(z) = G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \dots + G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right).$$

répond évidemment à la question. – Nous avons donc à nous occuper seulement du cas où il y a une infinité de points a. En pareil cas, nous pouvons supposer les indices rangés par ordre de modules croissants ou stationnaires ; l'ensemble des points a, ne pouvant d'après notre hypothèse, avoir d'autre point limite que le point ∞, il y aura un nombre limité de ces points dans tout cercle de rayon R et sur son contour, quelque grand que soit R ; donc $|a_n|$ devra devenir infini avec n.

Nous supposerons d'abord que le point 0 ne fait pas partie des points a. Ceci posé, considérons une fonction $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$, et soit $0 < \theta < 1$; On a :

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \dots\dots$$

---

[1] Mittag-Leffler. – Représentation analytique des fonctions monogènes uniformes A. M. Tome IV, page 8.

et ce développement est valable pour toutes les valeurs telles que $\left|\frac{z}{a}\right| < \theta$; donc dans ces conditions, $\frac{1}{z-a}$ est une fonction holomorphe de $\frac{z}{a}$, il en est alors de même de $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$; donc $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ se développera en série entière de la forme

$$G\left(\frac{1}{z-a}\right) = A_0 + A_1 \frac{z}{a} + A_2 \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \ldots\ldots \qquad \left|\frac{z}{a}\right| < 1$$

La série du second membre est uniformément convergente dans les limites considérées ; si donc on se donne un nombre ε, arbitraire, il existera un nombre K, tel que l'on ait:

$$\left| G\left(\frac{1}{z-a}\right) - P\left(\frac{z}{a}\right)\right| < \varepsilon.$$

en désignant par P le polynôme formé par les n premiers termes de la série, n étant choisi arbitrairement parmi les nombres entiers au moins égaux à K. Le nombre θ étant choisi une fois pour toutes, faisons correspondre aux points $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ une suite de nombres positifs $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n \ldots\ldots$ formant une série convergente ; déterminons pour chaque point a_i le polynôme P_i qui correspond à ε_i, et posons :

$$\varphi_1(z) = G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) - P_1\left(\frac{z}{a_1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_n(z) = G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - P_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \ldots$$

Nous allons démontrer que la série

$$(4) \qquad \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_n(z) + \ldots\ldots$$

définit une fonction $F(z)$ satisfaisant aux conditions énoncées.

Soit en effet, x un point quelconque du plan, ne coïncidant avec aucun des points a ; de ce point comme centre décrivons un cercle C ne contenant aucun de ces points. Si on joint le point x à chacun des points $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ la plus courte distance du cercle à ces différents points devant croître indéfiniment avec n, il existera un nombre entier fini q tel qu'on ait $\left|\frac{z}{a_n}\right| < \theta$ pour $n > q$ quelle que soit la position du point z sur la circonférence C. On aura alors pour tous ces points :

$$|\varphi_{q+1}(z)| < \varepsilon_{q+1} \quad |\varphi_{q+2}(z)| < \varepsilon_{q+2} \ldots\ldots |\varphi_{q+m}(z)| < \varepsilon_{q+m}$$

Mais la série des ε est convergente ; si donc nous nous donnons un nombre $\eta > 0$ quelconque, nous trouverons un entier h tel qu'on ait pour $m \geqslant h$

$$\varepsilon_{q+m} + \varepsilon_{q+m+1} \ldots\ldots\ldots < \eta$$

Donc il existe un nombre $q+h$, tel qu'on ait:

$$|\varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(z) + \ldots\ldots| < \eta \quad \text{pour } n \geqslant q+h$$

Donc la série (4) est uniformément convergente sur la circonférence C; d'ailleurs les fonctions φ sont holomorphes dans tout le cercle C; donc, d'après le théorème III, la série converge uniformément dans tout ce cercle et en particulier au point x; de plus sa somme est holomorphe dans le domaine du point x.

Soit $F(z)$ cette somme; nous venons d'établir qu'elle est holomorphe en tout point situé en dehors de l'ensemble $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n \ldots \infty$. Cherchons ce qui arrive au point a_p. En raisonnant comme précédemment sur la série.

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots\cdots + \varphi_{p-1}(z) + \varphi_{p+1}(z) + \cdots\cdots + \varphi_n(z) + \cdots\cdots$$

le point a_p devenant un point étranger à l'ensemble des a, on voit que cette série converge au point a_p et définit une fonction holomorphe $\psi(z)$ dans le domaine de ce point; sa somme est: $F(z) - G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right) + P_p\left(\frac{z}{a_p}\right)$.

On a donc, dans le domaine de a_p.

$$F(z) = G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right) + \psi(z) - P_p\left(\frac{z}{a_p}\right).$$

Donc $F(z)$ admet bien en chaque point a la singularité caractérisée par la fonction G correspondante. Le théorème est donc complètement démontré.

Remarque. — 1°. — Nous avons supposé que 0 ne se trouvait pas parmi les points a; s'il en faisait partie, on constituerait la fonction $F(z)$ en ajoutant en tête de la série (4) la fonction caractéristique correspondante $G_0\left(\frac{1}{z}\right)$.

2°. — Il est bien évident que la fonction $F(z)$ est susceptible d'une infinité de formes, à cause de l'indétermination qui subsiste dans le choix des ε, et dans celui des degrés des polynômes auxiliaires P.

III — Expression générale des fonctions uniformes. —

Toute fonction $f(z)$ uniforme, à singularités isolées, possède un ensemble de points a, et de fonctions G, analogue à celui que nous venons de considérer. — Nous pouvons donc constituer la fonction $F(z)$ correspondante. — Si on considère alors la différence $f(z) - F(z)$ elle est évidemment holomorphe dans le plan tout entier, si donc on désigne par $G(z)$ une fonction entière quelconque, on aura pour l'expression générale des fonctions uniformes à singularités isolées

$$(5) \qquad f(z) = G(z) + \Sigma\left[G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right]$$

Remarque — La série du second membre étant uniformément convergente sur le contour du cercle C considéré plus haut, il résulte

LIBRARY OF THE

des théorèmes donnés au début de cette leçon que la relation (5) pourra être différentiée un nombre quelconque de fois dans le domaine d'un point déterminé x étranger à l'ensemble $a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ On pourra alors effectuer cette opération dans le plan tout entier; en effet, supposons par exemple qu'on ait dérivé le second membre de la série (5); la série obtenu sera convergente partout, sauf aux points a, et aura par suite une somme $f_1(z)$ qui sera uniforme dans tout le plan. _ Mais la fonction $f'(z)$ est elle-même uniforme dans tout le plan et coïncide avec $f_1(z)$ dans l'intérieur du cercle; donc on a partout $f'(z) = f_1(z)$ d'après le théorème de Riemann.

Cette remarque très-importante en entraine une autre; s'il arrive que le degré de P_n ne croisse pas indéfiniment avec n, on pourra par un nombre fini de dérivations faire disparaître tous les polynômes auxiliaires.

IV _ Fonctions fractionnaires Nous avons appelé fractionnaire, une fonction qui n'a que des pôles; si le point à l'infini est un point ordinaire ou un pôle, nous avons vu que la fonction est une fraction rationnelle. Dans le cas général, le point ∞ sera un point singulier essentiel, isolé ou non isolé, suivant que le nombre des pôles sera limité ou non.

Considérons un cas particulier: supposons que chaque pôle est du premier degré; admettons en outre que les résidus soient tous inférieurs en module à un nombre fixe, nous pourrons donner dans ce cas une solution très-simple et un mode régulier de détermination des polynômes P.

Supposons d'abord qu'il existe un nombre entier μ tel que la série

$$\frac{1}{a_1{}^\mu} + \frac{1}{a_2{}^\mu} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{a_n{}^\mu} + \cdots\cdots$$

soit absolument convergente; la fonction caractéristique G_n se réduit ici à

$$\frac{A_n}{z-a_n} = -A_n\left(\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots\cdots + \frac{z^{\mu-2}}{a_n{}^{\mu-1}}\right) - A_n\frac{z^{\mu-1}}{a_n{}^{\mu-1}(z-a_n)}$$

Je dis qu'on pourra prendre

$$\varphi_n = A_n\frac{z^{\mu-1}}{a_n{}^{\mu-1}(z-a_n)} = A_n\frac{z^{\mu-1}}{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)}\cdot\frac{1}{a_n{}^\mu}$$

En effet, reprenons, autour d'un point x, une circonférence C, ne contenant aucun des pôles; à partir d'une valeur finie q de l'indice, la fraction $A_n\dfrac{z^{\mu-1}}{1-\frac{z}{a_n}}$ considérée sur la circonférence aura un module moindre qu'un nombre convenablement choisi, car elle conserve une valeur finie,

quel que soit z sur C, pour n infini. Comme d'ailleurs la série $\left|\frac{1}{a_n^{\mu}}\right|$ est convergente, il en résulte que la série

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots\cdots + \varphi_n + \cdots$$

sera uniformément convergente sur la circonférence C; le raisonnement s'achève comme dans le cas général, et la fonction cherchée la plus générale est alors

$$f(z) = G(z) + \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots + \varphi_n(z) + \cdots$$

$G(z)$ étant une fonction entière.

Exemple. — Supposons qu'on se donne les pôles :

$$z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots \pm n, \ldots$$

qui sont situés sur l'axe des x et qui ont pour affixes la suite des nombres entiers; dans ce cas, la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2} \cdots\cdots$$

étant convergente, on pourra prendre $\mu = 2$, et on aura :

$$\varphi_n(z) = A_n \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right]$$

Le cas particulier où les résidus sont tous égaux à l'unité donne lieu à une fonction que nous représenterons par $\lambda(z)$

$$\lambda(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(en exceptant } n=0\text{)}$$

Nous retrouverons cette fonction $\lambda(z)$ dans la prochaine leçon...

V — Passons au cas où il n'existe aucun nombre entier μ tel que la série

$$\frac{1}{a_1^{\mu}} + \frac{1}{a_2^{\mu}} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n^{\mu}} + \cdots$$

soit convergente; alors on doit faire varier le degré du polynôme auxiliaire $P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ avec l'indice du pôle correspondant. Dans ce cas, il suffit de pousser le développement jusqu'au degré $n-1$ exclusivement. On a en effet

$$\frac{1}{z-a_n} = -\left(\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{n-2}}{a_n^{n-1}}\right) + \frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}(a_n - z)}$$

Posons alors :

$$\varphi_n(z) = \frac{A_n z^{n-1}}{a_n^{n-1}(z-a_n)} = \frac{A_n z^{n-1}}{a_n^n\left(\frac{z}{a_n} - 1\right)} = \frac{1}{a_n^n}\left(\frac{z^{n-1} A_n}{\frac{z}{a_n} - 1}\right)$$

Lorsque n augmente indéfiniment, z restant toujours sur notre cercle C, le second facteur reste inférieur à un nombre fixe, indépendant de z; d'ailleurs la série dont le terme général est $\quad u_n = \dfrac{1}{a_n^n}$

est absolument convergente puisque $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{a_n}$ tend vers zero quand n augmente indéfiniment, et il en résulte évidemment que la série

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \ldots + \varphi_n(z) + \ldots$$

est uniformément convergente sur la circonférence C.

Remarque — Nous avons supposé que le résidu A_n ne croissait pas indéfiniment avec n : s'il en était autrement, on pourrait encore facilement déterminer le degré du polynôme auxiliaire $P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$; nous renverrons pour ce point de détail au cours d'analyse de Mr Hermite (Quatrième édition, page 100). — Ce que nous venons de dire suffira pour les développements que nous avons en vue.

Neuvième Leçon

Fonctions entières — Décomposition en facteurs primaires.

I. Facteurs primaires — Étant donnée une fonction $f(z)$, holomorphe pour toute valeur finie de z, autrement dit une fonction entière, il est naturel d'en chercher un mode de représentation analogue à la décomposition d'un polynôme entier en un produit de facteurs linéaires. Si le nombre des zéros est limité, comme chacun d'eux doit être d'un degré fini de multiplicité, on pourra former un polynome entier $P(z)$ ayant les mêmes zéros que $f(z)$ et aux mêmes degrés ; le rapport $\frac{f(z)}{P(z)}$ sera alors holomorphe dans tout le plan ; ce sera donc une fonction entière, et comme cette fonction n'a aucun zéro à distance finie, on pourra la représenter par $e^{G(z)}$, $G(z)$ étant elle-même une fonction entière. En résumé $a_1, a_2, \ldots a_n$ étant les zéros de $f(z)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ leurs degrés de multiplicité, on aura

$$(1) \qquad f(z) = e^{G(z)} (z-a_1)^{\alpha_1} (z-a_2)^{\alpha_2} \ldots (z-a_n)^{\alpha_n}$$

Supposons maintenant que le nombre des zéros soit illimité ; nous pourrons d'après le théorème de Mr Mittag Leffler, former une fonction ayant pour pôles simples $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ avec des résidus respectivement égaux à $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$; cette fonction sera la série

$$(2) \qquad \varphi(z) = \alpha_1\left[\frac{1}{z-a_1} + P_1\left(\frac{z}{a_1}\right)\right] + \ldots + \alpha_n\left[\frac{1}{z-a_n} + P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right]$$

Soit alors z_0 un point quelconque autre que les a ; décrivons de ce point

comme centre un cercle C qui ne contienne aucun des points $\underline{a}$. Si nous intégrons la série (2) le long d'un chemin contenu dans C et allant de z_0 à z, la série sera encore convergente; son terme général sera, en désignant par Lz une détermination précise du logarithme, par exemple celle qui s'annule pour $z = 1$:

$$(3) \qquad v_n = \alpha_n \left[L(z-a_n) - L(z_0 - a_n) \right] + \alpha_n \left[Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right) - Q_n\left(\frac{z_0}{a_n}\right) \right]$$

$Q\left(\frac{z}{a}\right)$ représente l'un quelconque des polynômes qui ont pour dérivée $P\left(\frac{z}{a}\right)$; nous prendrons celui qui s'annule en même temps que la variable, et on aura alors, d'après la forme des polynômes P:

$$(4) \qquad Q\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} + \cdots$$

Ceci posé, la formule (3) peut s'écrire

$$(5) \qquad v_n = \alpha_n L \frac{\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)}}{\left(1-\frac{z_0}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z_0}{a_n}\right)}}$$

Considérons alors le produit illimité

$$(6) \qquad \prod \frac{\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}}{\left[\left(1-\frac{z_0}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z_0}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}}$$

Si nous désignons par e^{H_m} le produit des m premiers facteurs on aura $H_m = S_m$, S_m étant la somme des m premiers termes de la série (2); donc H_m et par suite e^{H_m} tendront vers une limite déterminée quand m croîtra indéfiniment; d'ailleurs sa valeur $e^{\varphi(z)-\varphi(z_0)}$ sera une fonction holomorphe dans le cercle C.

Ce résultat ne s'applique qu'aux valeurs de z contenues dans C. Supposons que 0 ne soit pas l'un des points a. En appliquant le résultat qui précède on voit que le produit

$$\prod \left[\left(1-\frac{z_0}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z_0}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}$$

sera convergent à l'intérieur d'un cercle C_0 ayant 0 pour centre et s'étendant exclusivement jusqu'au point $\underline{a}$ le plus voisin, et représentera une fonction holomorphe. Si maintenant nous revenons au produit (6) nous en concluons que le produit

$$(7) \qquad \prod \left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}$$

sera convergent et définira une fonction holomorphe dans le cercle C qui correspond à z_0 ; il est clair qu'on pourra ainsi de proche en proche arriver à un point quelconque du plan ; en résumé le produit (7) sera convergent en tout point du plan et sa limite sera une fonction entière $F(z)$.

Revenons maintenant à la fonction donnée $f(z)$; supposons qu'elle admette, outre les points $a_1, a_2, a_n \ldots$ le point 0 au degré α de multiplicité ; le rapport $\frac{f(z)}{F(z) z^\alpha}$ sera une fonction holomorphe, sans aucun zéro à distance finie ; on pourra donc la représenter par $e^{G(z)}$, $G(z)$ étant une fonction entière ; on aura donc enfin

$$(8) \qquad f(z) = e^{G(z)} z^\alpha \prod \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}$$

C'est l'expression générale des fonctions entières ; les facteurs du produit Π ont été appelés facteurs primaires par M. Weierstrass.

Remarque. — Dans le cas où la série $\left|\frac{1}{a_n}\right|^\mu$ est convergente nous avons vu qu'on peut arrêter au degré $\mu - 2$ le développement des polynômes $P\left(\frac{z}{a}\right)$ qui nous ont servi de point de départ ; dans ces conditions le polynôme $Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ sera constamment du degré $\mu - 1$. Son expression sera :

$$Q\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} + \ldots + \frac{z^{\mu-1}}{(\mu-1)a^{\mu-1}}$$

On dit alors que la fonction $f(z)$ est du genre $\mu - 1$.

Lorsque cette circonstance se présente, on peut dériver par logarithmes, puis faire ensuite $\mu - 2$ dérivations ordinaires, on obtient alors une relation complètement dégagée d'exponentielles et qui ne conserve plus aucune trace des polynômes Q.

II. — Autre expression des fonctions fractionnaires. —

De la formule (8) nous déduirons une forme nouvelle d'une fonction méromorphe dans tout le plan, ou en d'autres termes d'une fonction fractionnaire. Soit $f(z)$ une pareille fonction ; ses pôles étant nécessairement isolés les uns des autres, nous pourrons former une fonction entière qui admette chacun d'eux comme zéro, avec le même degré de multiplicité. Soit $G_1(z)$ la fonction ainsi formée ; si nous considérons le produit

$$f(z)\, G_1(z)$$

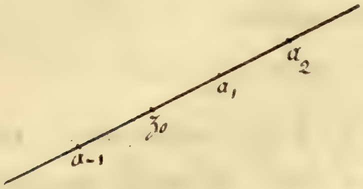
c'est une fonction fractionnaire mais qui n'a plus aucun pôle à distance finie ; c'est donc simplement une fonction entière, $G(z)$. On a donc cette nouvelle expression analytique

$$f(z) = \frac{G(z)}{G_1(z)}$$

Donc, toute fonction fractionnaire est le quotient de deux fonctions entières

III — La fonction $s(z)$. —

Comme première application, supposons les zéros de $f(z)$ simples et disposés régulièrement sur une droite; leurs affixes seront contenues dans la formule



$$a_n = z_0 + 2n\omega.$$

2ω étant la valeur de la différence entre deux zéros consécutifs.

En faisant la substitution $u = \frac{z - z_0}{2\omega}$ on est amené à chercher la fonction qui admet comme zéros la suite des nombres entiers.

$$\ldots\ldots -n, \ldots\ldots -2, -1, \ldots\ldots 0, 1, 2, \ldots\ldots n, \ldots\ldots$$

Or comme $\left|\frac{1}{n}\right|^2$ forme une série convergente, la fonction est donc du premier genre en remplaçant le facteur $e^{G(z)}$ par l'unité on est conduit à la fonction suivante

$$(10) \qquad s(z) = z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

l'accent indiquant que la valeur zéro ne doit pas être attribuée à n, sous le signe $\prod$. Nous allons étudier les propriétés de cette fonction $s(z)$.

1º La formule (10) peut s'écrire en réunissant les facteurs qui correspondent à des valeurs de n égales et de signes contraires

$$(11) \quad s(z) = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Cette forme met en évidence que $s(z)$ est une fonction impaire; en d'autres termes, on a

$$s(-z) = -s(z)$$

2º La dérivée logarithmique $\frac{s'(z)}{s(z)}$ est alors une fonction impaire; nous la désignerons par $\lambda(z)$ et nous aurons:

$$(12) \qquad \lambda(z) = \frac{s'z}{s(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

$$(13) \qquad \lambda'(z) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

3º Considérons en particulier la formule (12); désignons par λ_n la somme des termes de $-n$ à $+n$ inclusivement.

$$\lambda_n(z) = \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z+n-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{z-n}$$

d'où $$\lambda_n(z+1) = \frac{1}{z+n+1} + \frac{1}{z+n} + \cdots\cdots + \frac{1}{z-(n-1)}$$

et par suite $$\lambda_n(z+1) - \lambda_n(z) = \frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z-n}$$

Si nous faisons croître n indéfiniment, nous aurons:

$$(14) \qquad \lambda(z+1) = \lambda(z).$$

Donc la fonction $\lambda(z)$ admet la période 1. $\lambda'(z)$ admettra aussi la période 1; cela est évident d'ailleurs sur la formule (13); il suffit dans cette formule de remplacer n par $n-1$, ce qui est permis puisque n prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

4º La formule (14) peut s'écrire:

$$\frac{s'(z+1)}{s(z+1)} = \frac{s'(z)}{s(z)}$$

d'où en intégrant et désignant par C une constante

$$s(z+1) = C\, s(z)$$

Pour déterminer C faisons $z = -\frac{1}{2}$ on aura: $s\left(\frac{1}{2}\right) = C\, s\left(-\frac{1}{2}\right)$. Si nous observons que $s\left(+\frac{1}{2}\right)$ n'est ni nul ni infini, et que $s(z)$ est une fonction impaire on en déduira $C = -1$; d'où

$$(15) \qquad s(z+1) = -s(z) \qquad s(z+2) = s(z)$$

Observons que si l'on fait $z = -\frac{1}{2}$ dans (14) et que l'on tienne compte de ce que $\lambda(z)$ est impaire, il vient

$$(16) \qquad \lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

5º Nous démontrerons enfin une propriété importante de la fonction $\lambda'(z)$; c'est qu'elle tend vers zéro lorsque z augmente indéfiniment en restant imaginaire. Observons en effet que λ' admettant la période 1, nous pouvons en posant $z = x+iy$ supposer x compris entre 0 et 1 et faire croître indéfiniment y (si z tendait vers l'infini par des valeurs réelles, c'est-à-dire y étant égal à zéro, il est évident que $\lambda'(z)$ ne tendrait vers aucune valeur déterminée puisqu'on pourrait ramener toujours la variable à une valeur arbitraire réelle comprise entre 0 et 1).

Ceci posé, on a:

$$-\lambda'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-iy-n)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x-iy-n)^2} + \frac{1}{(x-iy+n)^2}\right]$$

Or on a: $$\left[\frac{1}{(x-iy-n)^2}\right] = \frac{1}{(x-n)^2+y^2} > \frac{1}{y^2+n^2} \quad \text{à cause de } x>0$$

$$\left|\frac{1}{(x-iy+n)^2}\right| = \frac{1}{(x+n)^2+y^2} > \frac{1}{(n+1)^2+y^2} \text{ à cause de } x<1$$

On aura donc

$$\left|X'(z)-\frac{1}{z^2}\right| < \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n^2+y^2}\right)+\sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)^2+y^2} < 2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+y^2}$$

Il suffit donc de prouver que la série

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\dots\dots+\frac{1}{y^2+n^2}+\dots\dots$$

a une somme qui s'annule quant y devient infini. Or soit q la partie entière de y. La somme des q premiers termes est évidemment moindre que $q\frac{1}{q^2}$ ou que $\frac{1}{q}$; quant aux termes suivants, ils ont pour valeurs :

$$\frac{1}{y^2+q^2},\ \frac{1}{y^2+(q+1)^2},\ \frac{1}{y^2+(q+2)^2},\dots\dots\dots$$

ils sont donc moindres que

$$\frac{1}{q^2},\quad \frac{1}{(q+1)^2},\quad \frac{1}{(q+2)^2},\dots\dots\dots$$

La somme de ces dernières valeurs est $S-S_q$, S et S_q étant la somme, et la somme des q premiers termes de la série convergente

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\dots+\frac{1}{n^2}+\dots\dots$$

On aura donc en définitive

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2-1}+\frac{1}{y^2-2^2}+\dots\dots<\frac{1}{q}+S-S_q$$

Or si y tend vers l'infini, il en est de même de q; le second membre tend évidemment vers zéro et le théorème se trouve démontré.

6° Revenons à la formule (II); nous avons en faisant $z=\frac{1}{2}$

$$s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\prod_1^\infty\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

Nous pouvons d'ailleurs évaluer bien simplement le produit. On a, en effet, par la formule de Wallis (1e partie, page)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\dots\dots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\dots\dots$$

On en conclut immédiatement

$$s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}$$

On aura donc en définitive pour résumer les propriétés de la fonction s, le tableau suivant

$$s(z) = z\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} = z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \lambda(z) = \frac{s'(z)}{s(z)}$$

$$s(0) = 0 \qquad s(-z) = -s(z) \qquad s(z+1) = -s(z) \qquad s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \lambda'(\infty)_{y\neq 0} = 0$$

L'équation qui définit $s(z)$ peut être généralisée ; si nous divisons terme à terme les deux formules

$$s(z-a) = (z-a)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z-a}{n}\right)e^{\frac{z-a}{n}}$$

$$s(-a) = -a\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}$$

il vient :

$$\frac{s(z-a)}{s(-a)} = \left(1-\frac{z}{a}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n}} = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

On peut encore écrire

$$\frac{s(z-a)}{s(-a)} = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n+a}}\prod_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{z}{n}-\frac{z}{n+a}}$$

ou

$$\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n+a}} = \frac{s(z-a)}{s(-a)}e^{-z\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{n(n+a)}}$$

On a d'ailleurs, formule (12)

$$\lambda(z) = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = 2\sum_{0}^{\infty}\frac{z}{z^2-n^2}$$

d'où, en supposant que a ne soit pas un nombre entier

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{-a}{n(n+a)} = \lambda(-a) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{n(n+a)} = \lambda(a)$$

D'où enfin la formule que nous avions en vue

$$(18) \qquad \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n+a}} = \frac{s(z+a)}{s(-a)}e^{-z\lambda(a)}$$

IV – Fonctions circulaires.

— . La fonction $\sin\pi z$ admet pour zéros la suite des nombres entiers ; nous pourrons donc l'exprimer à l'aide de la fonction $s(z)$ et poser

$$\sin\pi z = e^{G(z)}s(z)$$

$G(z)$ étant une fonction entière ; si nous différentions par logarithmes, nous aurons:

$$\pi \cot \pi z = G'(z) + \lambda(z)$$

et en différentiant de nouveau

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = G''(z) + \lambda'(z)$$

Nous savons déjà que $\lambda'(z)$ tend vers 0 quand z augmente indéfiniment par des valeurs imaginaires.

Il en est de même du premier membre ; on a en effet ;

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{zi} - e^{-zi}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix+y} - e^{-ix+y}\right)$$

et si on suppose $y \neq 0$ quand x augmente indéfiniment, cette expression croît elle-même en module au-delà de toute limite. Donc $G''(z)$ tend vers zéro quand z augmente à l'infini par des valeurs imaginaires.

Supposons que z croisse indéfiniment par des valeurs réelles ; un point à l'infini sur Ox peut être ramené par l'addition de périodes à être compris entre 0 et 1 ; tant qu'on ne sera pas ramené au point 0, $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ et $\lambda'(z)$, conserveront des valeurs finies ; quant au point zéro, c'est un pôle double pour l'une et l'autre de ces fonctions, et on a :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{z^2} + \varphi(z) \qquad \lambda'(z) = -\frac{1}{z^2} + \psi(z)$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant holomorphes au point 0 ; donc la somme $G''(z)$ reste finie en ce point ; donc enfin $G''(z)$ est finie pour toute valeur réelle ou imaginaire de z ; donc $G''(z)$ est une constante ; comme enfin cette constante s'annule pour z infini et complexe, on a simplement $G''(z) = 0$, d'où $G'(z) = C$, C étant une constante ; on aura donc :

$$\pi \cot \pi z = C + \lambda(z)$$

Changeons z en $-z$ et observons que $\cot z$, $\lambda(z)$ sont des fonctions impaires, nous aurons

$$-\pi \cot \pi z = C - \lambda(z)$$

d'où, en ajoutant, $C = 0$. Donc $G(z)$ est une constante et on a

$$\sin \pi z = c' s(z)$$

Si maintenant nous faisons $z = \frac{1}{2}$, $\sin \pi z = 1$ $s(z) = \frac{1}{\pi}$, $c' = \pi$ et on a enfin

$$(19) \qquad \sin \pi z = \pi s(z)$$

On en déduit immédiatement les développements suivants :

$$\sin \pi z = \pi \left(1-\frac{z^2}{1}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\cdots\cdots$$

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) + \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{1}{z^2} + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2}$$

Pour donner une application de ces formules, nous déduirons de la dernière la somme d'une série numérique importante. On a

$$\pi^2 = \sin^2 \pi z \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n}\right)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \cdots\right)^2$$

D'autre part :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{z-n}\right)^2 + \left(\frac{1}{z+n}\right)^2\right]$$

La seconde somme est maintenant holomorphe dans le domaine de l'origine, si nous la représentons par $\mu(z)$ nous avons :

$$\mu(z) = \sum_{1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{z-n}\right)^2 + \left(\frac{1}{z+n}\right)^2\right] = \mu(0) + z\,\mu(0) + \cdots$$

D'où

$$\pi^2 = \left[\frac{1}{z^2} + 2\,\mu(0) + 2z\,\mu'(0) + \cdots\cdots\right] \left[\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \cdots\cdots\right]^2$$

Si nous écrivons que dans le développement du second membre, le terme en z^2 est nul

$$2\pi^2 \mu(0) - \frac{2\pi^4}{6} = 0 \qquad \frac{\pi^2}{6} = \mu(0)$$

D'où enfin :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\cdots$$

Remarquons en terminant que toute fonction entière qui admet la période 2ω peut être développée en une série de Fourier dont le terme général est $a_n \sin \frac{n\pi z}{\omega} + b_n \cos \frac{n\pi z}{\omega}$; toute fonction fractionnaire admettant cette période, peut d'après un théorème démontré plus haut être mise sous la forme d'une fraction dont les deux termes sont des séries de Fourier ; on doit donc considérer la fonction $s(z)$ comme jouant un rôle fondamental dans la théorie des fonctions périodiques.

Dixième Leçon

Sur les fonctions uniformes qui possèdent un théorème d'addition.

I — Définition. — Nous avons dès le début, défini la fonction exponentielle par la propriété :

$$f(u+v) = f(u) \cdot f(v)$$

Les fonctions rationnelles possèdent une propriété analogue ; si en effet, on pose

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

P et Q étant des polynômes entiers, on aura.

$$Q(u) \cdot f(u) = P(u) \qquad Q(v) \cdot f(v) = P(v) \qquad Q(u+v) \cdot f(u+v) = P(u+v)$$

et si on élimine u et v entre ces trois relations, on obtiendra une équation entière de la forme

$$(1) \qquad G\{f(u+v), f(u), f(v)\} = 0$$

Il en serait de même de la fonction composée rationnellement avec e^z, si on a

$$f(z) = \frac{P(e^z)}{Q(e^z)}$$

on en déduira :

$$f(u)\, Q(e^u) = P(e^u) \qquad f(v) \cdot Q(e^v) = P(e^v) \qquad f(u+v)\, Q(e^u \cdot e^v) = P(e^u \cdot e^v)$$

d'où, en éliminant e^u, e^v, une relation de la forme (1).

On dit qu'une fonction f possède un théorème d'addition lorsqu'elle satisfait à une équation fonctionnelle de la forme (1), G étant un polynôme entier. M. Weierstrass a posé et résolu le beau problème de trouver toutes les fonctions uniformes qui possèdent un théorème d'addition ; et c'est la solution de ce problème qu'on doit prendre pour point de départ de la théorie des fonctions elliptiques.

Observons qu'il y a des fonctions multiformes possédant un théorème d'addition par exemple $\sqrt{z}$ satisfait à l'équation :

$$f^2(u+v) = f^2(u) + f^2(v)$$

mais nous nous limiterons exclusivement aux fonctions uniformes. Soit alors n le degré de l'équation (1) par rapport à $f(u+v)$.

Nous laisserons de côté les fractions rationnelles qui répondent comme nous l'avons vu à la question, et nous devrons par suite admettre, d'après un théorème

précédemment établi (II page 70) qu'il existe au moins une constante b telle que l'équation $f(z)-b=0$ ait plus de n racines distinctes ; soient alors

$$v_1, v_2, \ldots\ldots v_{n+1} \ldots\ldots;$$

les racines de l'équation $f(v)=b$; l'équation en H

$$G\left[H, f(u), b\right]=0$$

devra admettre, quel que soit u, les racines :

$$f(u+v_1),\ f(u+v_2),\ \ldots\ldots\ldots\ f(u+v_{n+1})$$

Or elle est seulement du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à H. Elle ne peut se réduire à une identité, puisque $f'(u)$ se réduirait alors à une constante ; donc il est nécessaire que deux des racines précédentes soient identiques ; on aura par exemple

$$f(u+v_\lambda)=f(u+v_\mu)$$

d'où, en faisant :

$$u+v_\mu=z$$

$$f(z+v_\lambda-v_\mu)=f(z)$$

En d'autres termes ; comme z est ici une valeur quelconque, $f(z)$ doit admettre la période $v_\lambda - v_\mu$ qui est essentiellement différente de zéro.

Nous obtenons donc ce premier résultat :

1° Si la fonction $f(z)$ n'est pas rationnelle, elle est nécessairement périodique.

II _ Fonctions périodiques. — . Supposons donc que $f(z)$ ait une période $\underline{2\omega}$; nous pouvons dmettre que cette période est irréductible, c'est-à-dire n'est multiple d'aucune autre ; si l'équation $f(v)=b$ admet une racine v_i, elle admet toutes les racines $v_i+2K\omega$, K étant un entier quelconque ; nous dirons que deux racines sont distinctes, si leur différence n'est pas un multiple entier de 2ω. Supposons alors, en nous plaçant à ce point de vue, que $f(v)=b$ n'ait qu'un nombre limité de racines distinctes, quel que soit b. Si nous posons alors $z'=e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$, $f(z)=\varphi(z')$, la fonction $\varphi(z')$ sera uniforme, puisqu'à une même valeur de z' correspondent des valeurs de z, en nombre infini, il est vrai, mais qui, différant deux à deux par des variables de 2ω, donneront à $f(z)$ et par suite à $\varphi(z')$ une valeur unique et bien déterminée.

En outre $\varphi(z')=b$ n'ayant qu'un nombre limité de racines, quel que soit b, sera une fonction rationnelle ; donc $f(z)$ se réduira à une fonction rationnelle de $e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$; nous avons fait remarquer au début qu'une pareille fonction possède un théorème d'addition.

Supposons maintenant que, pour une valeur au moins de b, $f(v)-b$ ait un nombre illimité de racines distinctes, c'est-à-dire non congrues à 2ω ; alors on verra comme plus haut que deux d'entre elles v_ρ v_σ doivent satisfaire à la condition

$$f(u+v_\rho)=f(u+v_\sigma) \qquad f(z+v_\rho-v_\sigma)=f(z)$$

il y a donc une seconde période $v_p - v_\sigma = 2\omega'$, qui n'est pas un multiple entier de 2ω, et qui, d'après notre hypothèse, n'en peut pas être un sous multiple — Nous pouvons donc énoncer le nouveau résultat :

9° Si une fonction uniforme et possédant un théorème d'addition admet une période 2ω, ou bien elle est composée rationnellement avec $e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$, ou bien elle admet au moins une seconde période, distincte de la première.

Nous sommes ainsi ramenés à considérer les fonctions uniformes qui ont au moins deux périodes distinctes.

Théorème I. — Lorsqu'une fonction uniforme admet deux périodes distinctes, le rapport de ces périodes est nécessairement imaginaire. (Jacobi, Œuvres Tome II ; page 25).

Soient $2\omega, 2\omega'$ les deux périodes, $2m\omega + 2m'\omega'$ sera également une période, si m et m' sont entiers ; il est d'abord évident que ω, ω' ne peuvent admettre une commune mesure $2\omega''$; sinon on aurait $\omega = p\omega''$, $\omega' = p'\omega''$, p, p' étant deux nombres entiers ; on pourrait alors, en supposant, ce qui est permis, p et p' premiers entre eux, trouver deux nombres entiers q, q' tels qu'on eût

$$pq' + qp' = 1$$

d'où

$$2q'p\omega'' + 2qp'\omega'' = 2\omega'' = 2p\omega + 2p'\omega'$$

$2\omega''$ serait donc une période, et $2\omega, 2\omega'$ multiples d'une même période ne seraient pas distinctes.

Nous pouvons démontrer que $\frac{\omega}{\omega'}$ ne peut être réel et incommensurable. Supposons, en effet, qu'on ait :

$$\omega = m\omega' \qquad \omega_1 = m_1\omega'$$

m, m_1 étant deux nombres réels incommensurables, on pourra trouver deux entiers q, q_1 tels qu'on ait :

$$|qm_1 - q_1m| < \varepsilon$$

et cela, quelque petit que soit ε.

Si alors on considère la quantité $\alpha = 2q\omega_1 - 2q_1\omega$ qui sera une période ; son module pourra être supposé inférieur à tout nombre donné.

Dans ces conditions, z_0 étant une valeur quelconque de la variable, on aurait

$$f(z_0 + \alpha) = f(z_0)$$

La fonction $f(z) - f(z_0)$ holomorphe dans le domaine du point z_0 aurait deux zéros, z_0 et $\alpha + z_0$ aussi rapprochés qu'on voudrait ; elle serait donc nulle dans tout le plan ; et $f(z)$ se réduirait à une constante.

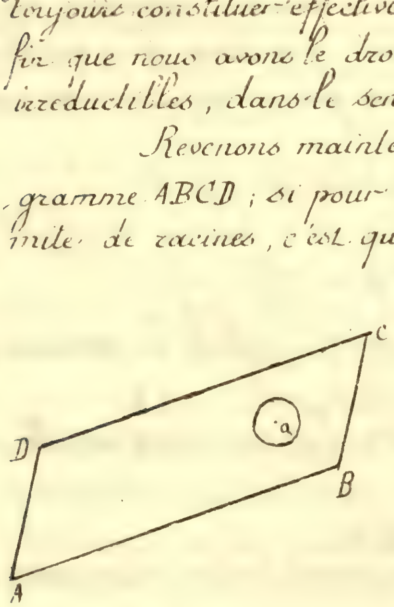
III — Fonctions doublement périodiques. — Les deux périodes

étant maintenant désignées par 2ω, $2\omega'$, on aura m, m' étant des nombres entiers arbitraires, positifs ou négatifs.

$$f(z + 2m\omega + 2m'\omega') = f(z)$$

Si on laisse fixe un des nombres entiers, m' par exemple, les points contenus dans la formule $z + 2m\omega + 2m'\omega'$ sont équidistants et distribués régulièrement sur une droite D faisant avec Ox un angle égal à l'argument de la période 2ω; si on fait ensuite prendre à m' toutes les valeurs possibles, cette droite D se déplace parallèlement à la direction de la seconde période et on voit que les points considérés forment dans leur ensemble les sommets d'un réseau de parallélogrammes qui couvrent le plan tout entier; l'angle au sommet de chacun d'eux est égal à la différence d'arguments des deux périodes, et comme le rapport de ces deux périodes est imaginaire, l'angle en question ne peut être ni 0 ni π; en d'autres termes, on pourra toujours constituer effectivement le réseau dont nous venons de parler; remarquons enfin que nous avons le droit de supposer que les deux périodes sont l'une et l'autre irréductibles, dans le sens où nous avons employé plus haut cette expression.

Revenons maintenant à la question proposée. Considérons un parallélogramme $ABCD$; si pour toute valeur de b, l'équation $f(z) = b$ n'a qu'un nombre limité de racines, c'est qu'il n'y a dans $ABCD$ aucun point singulier essentiel a; sinon (Lemme, page 70) p étant le nombre maximum de ces racines, β la valeur de b pour laquelle il est atteint, il existerait une valeur β' infiniment voisine de β, et telle que l'équation $f(z) - \beta' = 0$ aurait p racines aussi voisines que l'on voudrait des précédentes, par suite différentes entre elles, et en outre une $(p+1)^{\text{ième}}$ contenue dans le domaine de a et par suite distincte des premières; (ces $p+1$) racines seraient contenues dans $ABCD$ et p ne serait pas le nombre maximum.



Reste à examiner le cas où pour une valeur convenable de b, l'équation $f(z) = b$ aurait dans $ABCD$ un nombre illimité de racines distinctes; en raisonnant comme plus haut, on en conclurait que la différence de deux de ces racines serait une période; cette période étant d'ailleurs représentée géométriquement par un segment rectiligne dont les deux extrémités sont à l'intérieur de $ABCD$, serait nécessairement distincte de 2ω et de $2\omega'$. Or nous allons démontrer l'impossibilité d'une troisième période, nous arrivons donc au théorème général suivant:

Théorème. — Les seules fonctions uniformes qui puissent posséder un théorème d'addition sont:

1° Les fonctions rationnelles;

2° Les fonctions périodiques composées rationnellement avec $e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$

3° Les fonctions uniformes doublement périodiques.

Nous verrons d'ailleurs dans cette même leçon que les fonctions méromorphes doublement périodiques possèdent toutes un théorème d'addition. – Le problème sera alors complètement résolu quand nous aurons donné une expression générale de toutes les fonctions fractionnaires à deux périodes.

IV – Impossibilité de trois périodes.

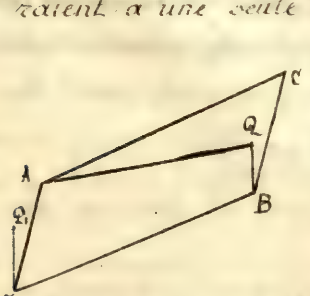
Nous avons dit qu'une fonction uniforme ne saurait avoir plus de deux périodes distinctes. On peut s'en assurer de la manière suivante. – Supposons en général p périodes $a_1, a_2 \ldots a_p$; et considérons tous les points P définis par l'égalité

$$z = z_0 + m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_p a_p$$

on doit pouvoir isoler le point z_0 de tous les autres points P, sinon, la fonction $f(z) - f(z_0)$ aurait un zéro qu'on ne pourrait isoler de tous les autres; elle se réduirait donc à une constante nulle dans le domaine du point z_0 et par suite dans le plan tout entier, d'après le théorème de Riemann.

En d'autres termes, le module des valeurs de z contenues dans la formule précédente admet une limite inférieure δ qui n'est pas nulle. Il est aisé de voir que cette limite est effectivement atteinte pour l'un au moins des points P. En effet d'après la définition même de δ, si ε désigne un nombre positif quelconque, il y aura toujours au moins un point P dans la couronne comprise entre deux cercles de rayon $\delta - \varepsilon$, $\delta + \varepsilon$, ayant z_0 pour centre; la distance de deux points P quelconques est d'ailleurs au moins égale à δ, car l'un quelconque d'entre eux peut être pris pour le point z_0; il y aura donc un nombre limité de points P dans la couronne circulaire, et le minimum $\underline{\delta}$ de distance au point z_0 sera nécessairement atteint par un ou plusieurs d'entre eux.

Soit alors A l'un des points qui correspondent au module δ; si tous les points P étaient en ligne droite avec $z_0 A$, deux quelconques des périodes seraient commensurables entre elles; alors, ou $f(z)$ serait une constante, ou ces périodes se réduiraient à une seule; il y aura donc un point B, faisant partie de ces points P plus rapprochés de z_0 que tous les autres, sauf A, et tel que les deux directions $z_0 A$, $z_0 B$ soient différentes. Nous pourrons dès lors construire un réseau de parallélogrammes couvrant le plan tout entier; je dis que tout point P doit être l'un des sommets de ce réseau. – En effet, soit P l'un des points en question. On pourra toujours par l'addition d'un nombre suffisant de périodes $z_0 A$, $z_0 B$, le ramener à un point Q situé ou dans $ABCD$ ou sur son contour. Or Q ne peut être ni sur $z_0 A$, ni sur $z_0 B$



puisqu'il serait plus rapproché de z_0 que A ou que B ; il ne peut être ni sur AC, ni sur BC car l'addition d'une période le ramènerait sur Az_0 ou sur Bz_0 ; enfin, il ne peut être à l'intérieur, car, le contour AQB étant alors inférieur à BCA, il faudrait ou que $BQ < BC$ ou que $AQ < AC$; dans l'un ou l'autre cas, on obtiendrait par une parallèle z_0Q, un point de période plus rapproché de z_0 que A ou que B ; donc en définitive tous les points P peuvent être ramenés aux quatre sommets du parallélogramme ; les périodes sont donc réductibles à deux z_0A, z_0B, ce qu'il fallait prouver.

V — Premières propriétés des fonctions doublement périodiques.

Nous sommes maintenant amenés à chercher s'il existe des fonctions fractionnaires à deux périodes. L'étude d'une pareille fonction se limite à l'étendue d'un parallélogramme ABCD, puisque tout point du plan peut être ramené par l'addition de périodes, à l'intérieur ou sur le contour de ABCD. Il serait naturel de considérer d'abord le cas d'une fonction holomorphe dans ABCD ; mais une pareille fonction conservant un module fini dans ABCD aurait un module fini dans tout le plan, et par suite se réduirait à une constante. De là ce premier résultat (pour abréger, nous désignerons par P le parallélogramme ABCD.)

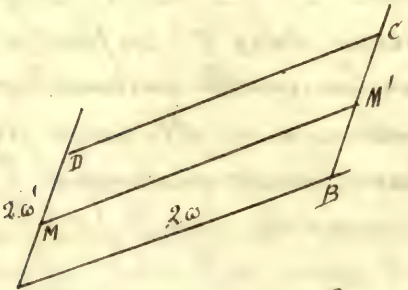
Théorème I. — . Toute fonction doublement périodique, qui reste holomorphe dans P se réduit à une constante.

Nous devrons donc considérer les fonctions ayant au moins un pôle ; il est naturel d'appliquer immédiatement le théorème des résidus.

Considérons donc l'intégrale

$$\int_P f(z)\,dz$$

prise le long du contour ABCD. On peut la décomposer en quatre autres que nous désignerons pour abréger par $(AB)+(BC)+(CD)+(DA)$. Or si nous considérons deux points M, M' situés sur une même parallèle à AB, $f(z)$ prend en ces deux points la même valeur ; les deux intégrales (AD) (BC) sont donc égales entre elles, les valeurs de dz étant identiques de même $(AB) = (CD)$



$$\int_P f(z)\,dz = (AB) + (BC) + (BA) + (CB) = 0$$

D'autre part, cette intégrale divisée par $2i\pi$ donne la somme des résidus de $f(z)$ dans ABCD ; donc

Théorème. — . La somme des résidus d'une fonction doublement périodique à l'intérieur de P est égale à zéro.

Remarque. — Pour qu'un observateur, parcourant ABCD, ait à sa gauche l'intérieur du parallélogramme, en d'autres termes, pour que le sens dans lequel nous avons évalué l'intégrale précédente soit direct, il faut et il suffit que $\widehat{BAD} < \pi$. Or sur $\widehat{BAD}$ est le coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, il faut donc que dans $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i soit positif; nous supposerons toujours qu'on ait disposé les deux périodes dans un ordre tel, que cette condition soit vérifiée.

Le théorème précédent peut être généralisée; supposons une fonction telle qu'on ait, a, a' étant deux constantes.

$$f(z)+2\omega = f(z)+a \qquad f(z+2\omega') = f(z)+a'$$

on voit tout de suite en reprenant le raisonnement précédent qu'on a ici

$$\int_P f(z)\,dz = 2a\omega' - 2a'\omega$$

Donc la somme S des résidus de cette fonction sera

$$S = \frac{a\omega' - a'\omega}{i\pi}$$

Revenons à une fonction doublement périodique; sa dérivée $f'(z)$ a évidemment les mêmes périodes, et il en est de même de la dérivée logarithmique $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Or la somme des résidus de cette dernière fonction est égale à la somme des ordres de la première. Donc:

Théorème. — La somme des ordres d'une fonction fractionnaire à l'intérieur de P est égale à zéro.

On tire immédiatement, de ce qui précède, les conclusions suivantes:

1° Si la fonction $f(z)$ n'a qu'un pôle unique dans P; ce pôle a un résidu nul; il est donc au moins du second degré — Donc il n'y a pas de fonction qui n'ait au moins deux pôles, distincts ou confondus, dans P. Les fonctions à deux pôles sont donc les plus simples de toutes; on les appelle fonctions elliptiques

2° Si une fonction a, dans P, p pôles distincts ou non, elle aura p zéros; plus généralement, elle prendra p fois une valeur donnée quelconque b; car $f(z) - b$ sera une fonction doublement périodique et aura les mêmes pôles que $f(z)$ elle aura donc p zéros dans P.

IV — Théorème d'addition.

— Si dans l'équation

$$(1) \quad G\left[f(u+v), f(u), f(v)\right] = 0$$

on considère v comme une constante, on en conclut que $f(u+v)$, $f(u)$ doivent être liées par une relation algébrique; or si $f(u)$ admet les périodes $2\omega, 2\omega'$ $f(u+v)$ les admettra également et on est ainsi amené à chercher, d'une manière

générale dans quel cas deux fonctions f, φ uniformes fractionnaires, et aux mêmes périodes seront liées par une équation entière — Nous procéderons par la méthode des coefficients indéterminés, soit

$$(2) \qquad \sum A_{\alpha\beta} f^{\alpha} \varphi^{\beta} = 0$$

la relation algébrique supposée ; son premier membre $F(z)$ est une fonction fractionnaire et doublement périodique ; nous déterminerons ses coefficients par la double condition que $F(z)$ n'ait aucun pôle et se réduise à 0 pour une valeur particulière de z ; dans ces conditions $F(z)$ étant doublement périodique et entière, se réduira identiquement à 0.

Soit donc a un pôle de f ou de φ ; si on remplace f, φ, par leurs expressions dans le domaine de a on mettra en évidence un système de fractions de la forme

$$\frac{M_1}{z-a} + \frac{M_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{M_n}{(z-a)^n}$$

M_1, M_2, M_n étant des fonctions linéaires et homogènes des coefficients inconnus $A_{\alpha\beta i}$ on obtiendra ainsi, pour chaque pôle, un système d'équations

$$(3) \qquad M_1 = 0 \quad M_2 = 0 \ \ldots \ M_n = 0$$

Il est facile d'en déterminer le nombre ; soient en effet :

n le nombre des pôles de f contenus dans P, ces pôles étant ou non distincts

n' le nombre des pôles de φ contenus dans P

l le degré de F par rapport à f, l' son degré par rapport à φ.

La fonction $F(z)$ aura évidemment, dans P, $ln + n'l'$ pôles distincts ou confondus ; chaque pôle d'ordre K fournira K équations (3) ; donc le nombre total des équations (3) sera $ln + l'n'$. — Si on y adjoint l'équation $F(z_0) = 0$ on aura en tout un nombre d'équations égal à

$$ln + l'n' + 1$$

D'autre part le nombre total des coefficients $A_{\alpha\beta}$ est $(l+1)(l'+1)$; pour que le système linéaire admette certainement un système de solutions non identiquement nulles, il suffit que le nombre des équations soit inférieur à celui des inconnues, c'est-à-dire qu'on ait

$$ln + l'n' + 1 < (l+1)(l'+1) \qquad ln + l'n' < ll' + l + l'$$

ou encore

$$\frac{n}{l'} + \frac{n'}{l} < 1 + \frac{1}{l} + \frac{1}{l'}$$

Or, on peut toujours y satisfaire en prenant l et l' suffisamment grands, puisque les deux membres ont pour limites respectivement 0 et 1. De là cet important théorème

Théorème. — Deux fonctions fractionnaires doublement périodiques aux mêmes périodes, sont liées par une relation algébrique.

Corollaire. — Toute fonction fractionnaire doublement périodique admet un théorème d'addition.

En effet v étant considérée comme une constante, $f(u+v)$ et $f(u)$ seront deux fonctions de u, aux mêmes périodes et auront entre elles une relation algébrique

$$\sum A_{pq} f^p(u+v) f^q(u) = 0$$

Les A_{pq} étant fonctions de v; or si nous échangeons u et v la relation précédente subsistera et sous sa nouvelle forme, sera une fonction entière de $f(u+v)$ et de $f(v)$; donc les A_{pq} ne peuvent être que des polynômes entiers en $f(v)$; donc enfin le premier membre de l'identité précédente est un polynôme entier en $f(u+v)$, $f(u)$, $f(v)$. Il y a donc bien un théorème d'addition.

Remarque. — Si $f(z)$ est doublement périodique, $f'(z)$ aura les mêmes périodes; donc il existe une relation algébrique entre $f(z)$ et $f'(z)$. Toute fonction rationelle de z ou de e^z est de même liée à sa dérivée par une relation algébrique cette propriété appartient donc à toute fonction ayant un théorème d'addition. Nous verrons un peu plus tard que réciproquement les fonctions uniformes à théorème d'addition sont les seules qui soient liées algébriquement à leur dérivée.

Onzième Leçon.

La fonction σ et les fonctions doublement périodiques.

I — La fonction $\sigma(z)$. — Nous devons maintenant, en admettant qu'il existe de pareilles fonctions, chercher l'expression analytique générale des fonctions fractionnaires doublement périodiques; une pareille fonction peut, comme nous l'avons vu, être mise sous la forme d'une fraction dont les termes sont des fonctions entières. Si a est un zéro de $f(z)$, le numérateur de cette fraction devra satisfaire à l'égalité:

$$G(z - a - 2m\omega - 2m'\omega') = 0$$

Et par suite, la fonction $G(z+a) = \varphi(z)$ devra admettre comme zéros tous les points donnés par la formule

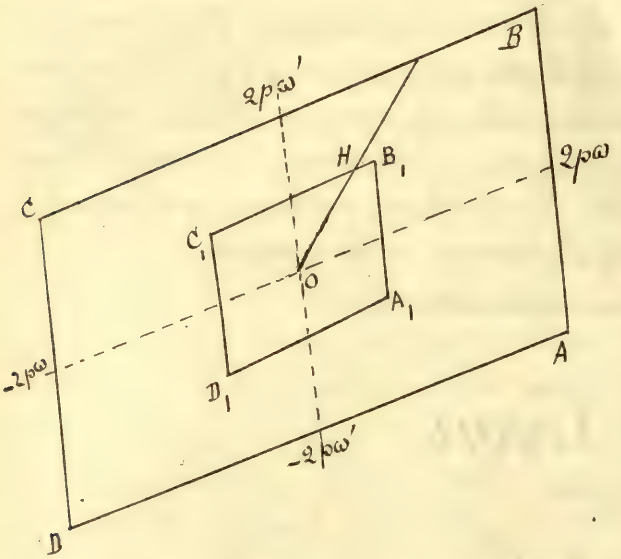
$$w = 2m\omega + 2m'\omega'$$

Nous sommes donc amenés à chercher la fonction entière la plus simple qui admette comme zéros les sommets du réseau de parallélogrammes ; elle jouera dans la théorie des fonctions doublement périodiques le même rôle que la fonction $s\left(\frac{\pi z i}{\omega}\right)$ dans la théorie des fonctions à une période.

Nous démontrerons d'abord que la fonction est du second genre, c'est-à-dire que la série double dont le terme général est

$$\left|\frac{1}{w}\right|^3 = \left|\frac{1}{2m\omega + 2m'\omega'}\right|^3$$

est convergente. Groupons en effet, les points w de la manière suivante : p étant un nombre entier donné, construisons les quatre points $z = \pm 2p\omega$ $z = \pm 2p\omega'$; et menons par ces points des parallèles aux deux périodes ; nous formerons ainsi un contour sur lequel il y aura un nombre de points de l'ensemble égal à



$$4(2p+1) - 4 = 8p$$

Nous réunirons en un groupe unique g_p les 8 points situés sur le contour en question en donnant à p toutes les valeurs entières de 0 à $+\infty$, nous aurons parcouru tout l'ensemble des points w.

Tous les contours considérés sont homothétiques ; prenons un point du groupe g_p ; en le joignant à l'origine nous couperons en un point H le contour qui correspond au groupe g_1 et nous aurons

$$|w| = p . OH$$

Or si nous désignons par δ le rayon d'un cercle intérieur à ABCD on aura $OH > \delta$; d'où

$$|w| > p . \delta .$$

Soit alors μ un nombre positif quelconque ; considérons la série $\left|\frac{1}{w}\right|^\mu$; le groupe g_p donnera une somme inférieure à

$$\frac{1}{\delta^\mu} \cdot \frac{1}{p^\mu} \, 8p = \frac{8}{\delta^\mu} \, \frac{1}{p^{\mu-1}}$$

La série linéaire obtenue en faisant varier p de 0 à ∞ sera donc convergente

si nous prenons $\mu = 3$. Donc la série double dont le terme est $\frac{1}{w^3}$ est absolument convergente pour un mode spécial de groupement et par suite pour un mode spécial de groupement quelconque ; la fonction σ est donc de genre 2. Nous aurons alors immédiatement l'expression analytique de $\sigma(z)$ par :

$$(1) \quad \sigma(z) = z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}} \qquad (w = 2m\omega + 2m'\omega')$$

l'accent indiquant que le couple de valeurs $m = m' = 0$ doit être exclu du produit.

On reconnait immédiatement que cette fonction est impaire ; on a, en effet

$$\sigma(-z) = -z \prod{}' \left(1 + \frac{z}{w}\right) e^{-\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}}$$

Or nous pouvons évidemment changer simultanément m en $-m$ et m' en m', dans le produit, w change alors de signe, et on a :

$$\sigma(-z) = -z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}} = -\sigma(z)$$

II — Les fonctions $\xi(z)$, $p(z)$.

La formule (1) qui donne σ sous la forme d'un produit double serait évidemment peu commode au point de vue du calcul numérique ; mais elle nous permettra de mettre en évidence avec une grande facilité les propriétés fondamentales de la fonction au point de vue de la double périodicité. Nous pouvons d'abord par des dérivations faire disparaître les exponentielles ; nous aurons ainsi de nouvelles fonctions

$$(2) \quad \xi(z) = + \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right)$$

$$(3) \quad p(z) = -\xi'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{w^2}\right)$$

La fonction σ étant impaire, σ' sera paire, donc ξ sera impaire et par suite p sera paire ; on aura :

$$(4) \quad \sigma(-z) = -\sigma(z) \qquad \xi(-z) = -\xi(z) \qquad p(z) = p(-z) \qquad p'(-z) = -p'(z)$$

Si nous différentions l'équation (3) nous aurons

$$(5) \qquad p'(z) = -2 \sum \left(\frac{1}{z-w}\right)^3$$

Or, si nous remplaçons m par $m-1$ dans w, ce qui est évidemment permis, puisque m prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, nous aurons :

$$p'(z) = -\sum \left[\frac{1}{z + 2\omega - (2m\omega + 2m'\omega')}\right]^3 = p'(z + 2\omega)$$

donc $p'(z)$ admet la période 2ω et par suite aussi $2\omega'$.

Si maintenant nous intégrons l'égalité précédente

$$p(z+2\omega) = p(z) + C$$

Faisons $z = -\omega$ et observons que $p(\omega)$ est nécessairement fini, les pôles de ζ, de p et de p' étant seulement les points w. Nous aurons alors:

$$p(\omega) = p(-\omega) + C$$

d'où $C = 0$ puisque $p(z)$ est paire; donc $p(z)$ admet comme période 2ω et par suite aussi $2\omega'$.

Si nous intégrons ensuite l'équation

$$p(z+2\omega) = p(z)$$

il vient:

$$\zeta(z+2\omega) = \zeta(z) + C$$

C étant encore une constante arbitraire; en faisant $z = -\omega$, nous aurons

$$C = \zeta(\omega) - \zeta(-\omega) = 2\zeta(\omega) = 2\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$$

Nous poserons:

$$\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)} = \eta \qquad \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')} = \eta'$$

et nous aurons:

$$\zeta(z+2\omega) = \zeta(z) + 2\eta \qquad \zeta(z+2\omega') = \zeta(z) + 2\eta'$$

Intégrons enfin l'une de ces deux relations, la première, par exemple,

$$\sigma(z+2\omega) = C\,\sigma(z)\,e^{2\eta z}$$

Faisons encore $z = -\omega$, nous aurons

$$\sigma(+\omega) = C\cdot\sigma(-\omega)\,e^{-2\eta\omega} \quad \text{d'où } C = -e^{2\eta\omega}$$

Nous aurons donc en résumé:

$$(6)\ \left\{\begin{array}{llll} p'(z+2\omega) = p'(z) & p'(z+2\omega') = p'(z) & p(z+2\omega) = p(z) & p(z+2\omega') = p(z) \\ \zeta(z+2\omega) = \zeta(z) + 2\eta & \zeta(z+2\omega') = \zeta(z) + 2\eta' & \eta = \dfrac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)} & \eta' = \dfrac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')} \\ \sigma(z+2\omega) = -\sigma(z)\,e^{2\eta(z+\omega)} & & \sigma(z+2\omega') = -\sigma(z)\,e^{2\eta'(z+\omega')} & \end{array}\right.$$

Observons encore que les constantes $\eta\omega$, $\eta'\omega'$ ne sont pas indépendantes en effet la fonction ζ se reproduit augmentée de 2η ou de $2\eta'$ quand on augmente l'argument z de 2ω ou de $2\omega'$; donc la somme des résidus de ζ dans P est égale à:

$$\frac{2\eta\omega' - 2\eta'\omega}{i\pi}$$

Mais ζ n'a qu'un pôle simple dans chaque parallélogramme ; donc la somme des résidus est + 1 et on a :

$$(7) \qquad 2\eta\omega' - 2\eta'\omega = i\pi$$

III — Propriétés de la fonction σ. — . La fonction $p(z)$ est doublement périodique et admet un pôle double $z=0$; c'est par conséquent une fonction elliptique.

1° Nous savons que $p(z)$ est paire ; il en résulte que son développement dans le domaine de l'origine, suivant la série de Laurent, est de la forme :

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + Az^2 + Bz^4 + \ldots\ldots$$

On en conclut, par intégration en n'introduisant aucune constante, parce que $\zeta - \frac{1}{z}$ est impair

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + mz^3 + nz^5 + \ldots$$

Or on a d'autre part, pour $\sigma(3)$.

$$\sigma(z) = z(1 + az^2 + bz^4 + \ldots\ldots) \qquad \sigma'(z) = 1 + 3az^2 + 5bz^4 + \ldots\ldots$$

Substituons ces développements dans $\sigma'(z) = \zeta(z)\sigma(z)$, il vient :

$$(1 + az^2 + bz^4 + \ldots\ldots)(1 + mz^4 + nz^5 + \ldots\ldots) = 1 + 3az^2 + 5bz^4 + \ldots\ldots$$

En égalant les termes en z^2, on obtient $a=0$. Donc le second terme manque dans le développement de $\sigma(z)$. Cette lacune constitue une des propriétés importantes de $\sigma(z)$.

2° La fonction $p(u) - p(v)$ où v est un paramètre quelconque est doublement périodique ; elle admet le zéro $u = v$; elle admet aussi $u = -v$ puisque p est une fonction paire ; elle n'en admet aucun autre puisque la fonction n'a qu'un pôle double et possède par suite deux zéros, (la somme des ordres étant nulle).

La fonction $H = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}$ a évidemment les mêmes zéros et les mêmes pôles ; elle est d'ailleurs doublement périodique, car

$$H(u+2\omega) = \frac{\sigma(u+2\omega+v)\ \sigma(u+2\omega-v)}{\sigma^2(u+2\omega)} = \frac{\sigma(u+v)e^{2\eta(u+v+\omega)}\sigma(u-v)e^{2\eta(u-v+\omega)}}{\sigma(u)e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)e^{2\eta(u+\omega)}} = H(u)$$

et de même $H(u+2\omega') = H(u)$. Ceci posé, le rapport $\frac{p(u)-p(v)}{H(u)}$ admet les mêmes périodes ; il n'a aucun pôle dans P ; donc il se réduit à une constante C, et on a :

$$C\left[p.u - p.v\right] = \frac{\sigma(u+v).\sigma(u-v)}{\sigma^2 u}$$

Pour déterminer C, remplaçons p et σ par leurs développements en série

$$C\left(-p.v + \frac{1}{u^2} + Au^2 + \ldots\right)u^2(1 + bu^4 + \ldots)^2 = \sigma(u+v).\sigma(u-v).$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

et faisons $u=0$, on a immédiatement $C = -\sigma^2 v$. D'où :

$$(8) \quad p(v) - p(u) = \frac{\sigma(u+v) \cdot \sigma(u-v)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2 v}.$$

Nous connaissons maintenant les propriétés essentielles de la fonction $\sigma(z)$; elles contiennent toute la théorie des fonctions doublement périodiques (Voir Halphen : Fonctions elliptiques Tm I page 184) On peut les résumer dans le tableau suivant

$$(9) \begin{cases} \sigma(z) = z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}} & \sigma(z) = z + az^5 + bz^7 + \dots \\ \sigma(z+2\omega) = -\sigma(z) e^{2\eta(z+\omega)} & \sigma(z+2\omega') = -\sigma(z) e^{2\eta'(z+\omega')} \\ \frac{\sigma(u+v) \cdot \sigma(u-v)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2 v} = pv - pu \end{cases}$$

Toutes les propositions que nous avons rencontrées ou que nous rencontrerons en dehors de celles-là en sont des conséquences immédiates.

IV — Transformation des périodes. —

Les deux périodes 2ω, $2\omega'$ donnent lieu à un réseau de parallélogrammes et tous les points de périodes coïncident avec les sommets de ce réseau ; on peut du moins, comme nous l'avons vu réaliser cette condition en choisissant convenablement 2ω, $2\omega'$; on dit alors que les deux périodes sont primitives. — Un même réseau peut d'ailleurs être constitué d'une infinité de manières : Si en effet nous désignons par $p, q, p'q'$ des nombres entiers et que nous posions :

$$(10) \quad \tilde{\omega} = p\omega + q\omega \qquad \tilde{\omega}' = p\omega' + q'\omega'$$

$2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ seront deux périodes qui pourront servir à construire un certain réseau ; il est bien évident que tous les points du réseau $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ appartiendront au réseau $(\omega\,\omega')$; or si nous supposons $pq' - qp' = \pm 1$ il est clair que l'on aura

$$\omega = p_1 \tilde{\omega} + q_1 \tilde{\omega}' \qquad \omega' = p_1' \tilde{\omega} + q_1' \tilde{\omega}'$$

$p_1\, q_1\, p_1'\, q_1'$ étant des nombres entiers parfaitement déterminés ; donc tous les sommets de $(\omega\,\omega')$ appartiendront au réseau $(\tilde{\omega}\,\tilde{\omega}')$ en d'autres termes $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$, seront deux nouvelles périodes primitives et les deux réseaux coïncideront. — Quand on passera d'un système de périodes à un autre à l'aide de la substitution (10) la fonction σ restera identique à elle même, puisque les zéros qui figurent dans le produit Π resteront les mêmes, leur ordre seul étant modifié. On peut s'en assurer directement en remarquant que lorsque le couple de nombres entiers (m, m') passe une fois et une seule par toutes les valeurs possibles il en est de même du couple $(pm + qm',\ p'm + q'm')$ pourvu qu'on ait $pq' - qp' = \pm 1$.

V — Expression générale des fonctions de troisième espèce. —

Les propriétés de la fonction $\sigma(z)$ conduisent naturellement à envisager sous un point de vue plus général la notion de la double périodicité ; nous dirons qu'une fonction $f(z)$ est de troisième espèce lorsqu'elle satisfera aux deux conditions —

suivantes

$$(1)\qquad f(z+2\omega)=e^{2\lambda z+\mu}f(z) \qquad\qquad f(z+2\omega')=e^{2\lambda' z+\mu'}f(z)$$

Dans le cas où $\lambda = \lambda' = 0$, la fonction se reproduit multipliée par une constante quand on augmente l'argument de 2ω ou de $2\omega'$; nous dirons alors que la fonction est de seconde espèce ; on aura alors :

$$(2)\qquad f(z+2\omega)=e^{\mu}f(z) \qquad\qquad f(z+2\omega')=e^{\mu'}f(z)$$

Enfin nous conserverons le nom de fonction doublement périodique pour le cas où $\mu=\mu'=0$ c'est-à-dire où l'on a :

$$(3)\qquad f(z+2\omega)=f(z) \qquad\qquad f(z+2\omega')=f(z)$$

Les fonctions de troisième espèce comprennent toutes les autres comme cas particuliers ; d'autre part, il suffit d'envisager la fonction $\frac{d}{dz} L f(z)$ pour être ramené dans tous les cas, aux fonctions doublement périodiques ; nous en conclurons que la restriction imposée aux périodes, d'avoir un rapport imaginaire, doit être étendue aux fonctions uniformes de seconde et de troisième espèce.

Cherchons l'expression générale des fonctions fractionnaires qui satisfont aux relations (1) – Soient $a, a_2, \dots a_p$ les zéros de $f(z)$ dans P ; soient de même $b_1 b_2 \dots b_p$ ses pôles ; les a aussi bien que les b peuvent être distincts ou non. Si nous considérons la fonction

$$\varphi(z)=\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\dots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\dots\sigma(z-b_q)}$$

le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ sera une fonction fractionnaire n'ayant aucun pôle ni aucun zéro dans le plan ; on peut donc le représenter par $e^{G(z)}$, $G(z)$ étant une fonction entière, et on aura par suite

$$f(z)=\varphi(z)e^{G(z)}$$

On en déduira :

$$\frac{d}{dz}\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{d}{dz}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=G''(z)$$

Mais φ est évidemment une fonction de troisième espèce ; donc le premier membre de l'égalité précédente est doublement périodique ; la fonction $G''(z)$ étant doublement périodique et entière doit se réduire à une constante ; donc enfin $G(z)$ est un trinôme du second degré, et on aura :

$$(4)\qquad f(z)=e^{Az^2+Bz+C}\,\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\dots\dots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\dots\sigma(z-b_q)}$$

Telle est l'expression générale des fonctions doublement périodiques. Il faut

exprimer ABC en fonction de $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$. — Si nous posons

$$(5) \qquad E = a_1 + a_2 + \dots + a_p - b_1 - b_2 - \dots - b_q$$

lorsque nous remplacerons z par $z + 2\omega$, le second membre de l'équation (4) se reproduira multiplié par l'exponentielle :

$$(-1)^{p-q} e^{4A\omega^2 + 4A\omega z + 2B\omega + 2\eta\left[(p-q)z + (p-q)\omega - E\right]}$$

On devra donc avoir identiquement, K étant un nombre entier

$$4A\omega^2 + \left[4A\omega + 2\eta(p-q)\right]z + 2B\omega + 2\eta(p-q)\omega - 2\eta E + i(p-q)\pi = 2\lambda z + \mu + 2iK\pi$$

d'où deux groupes de relations dont le second s'obtiendra en accentuant les lettres

$$(6) \qquad 2A\omega + \eta(p-q) = \lambda \qquad\qquad 2A\omega' + \eta'(p-q) = \lambda'$$

$$(7) \quad 2\lambda\omega + 2B\omega - 2\eta E + i\pi(p-q) = \mu + i2K\pi \qquad 2\lambda'\omega' + 2B\omega' - 2\eta' E + i\pi(p-q) = \mu' + 2iK'\pi$$

La constante C reste arbitraire ; les équations (6) et (7) permettent de déterminer A et B, et fourniront en même temps deux équations de condition que nous allons former.

Les équations (6) donnent en éliminant A :

$$(8) \qquad \lambda\omega' - \lambda'\omega = (p-q)(\eta\omega' - \eta'\omega) = \frac{i\pi(p-q)}{2}$$

On aura de même en éliminant b à l'aide des équations (7)

$$H = 2(\lambda - \lambda')\omega\omega' + i\pi(p-q)(\omega' - \omega) - Ei\pi + \mu\omega' - \mu'\omega = 2i\pi(K\omega' - K'\omega)$$

II — Expression générale des fonctions de seconde espèce. —

Si dans l'équation (8) nous faisons $\lambda = \lambda' = 0$, nous obtenons immédiatement $p - q = 0$. Donc, le nombre des pôles doit être égal au nombre des zéros.

L'équation (9) donne ensuite :

$$(10) \quad -Ei\pi \equiv \mu\omega' - \mu'\omega$$

le signe $\equiv$ indiquant qu'on néglige des multiples entiers des périodes.

Les équations (6) donnent alors $A = 0$, et la première équation (7) devient

$$(11) \qquad 2B\omega - 2\eta E = \mu + 2iK\pi$$

ce qui détermine B sans ambiguité. En résumé on aura pour les fonctions de seconde espèce :

$$(12) \qquad f(z) = e^{Bz+C} \frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\dots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\dots\sigma(z-b_p)}$$

avec la condition

$$(13) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_p - a_1 - a_2 \dots - a_p \equiv \frac{\mu\omega' - \mu'\omega}{i\pi}$$

La relation (13) est due à Mr Hermite.

III — Expression générale des fonctions doublement périodiques

Si nous faisons $\mu = \mu' = 0$ dans les relations précédentes, la formule (10) nous donne d'abord $E = 0$; l'équation (11) nous donne ensuite $B = \frac{ik\pi}{\omega}$ et comme on devra avoir de même $B = \frac{ik'\pi}{\omega'}$ on en déduira

$$k\omega' = k'\omega$$

d'où $k = 0$ $k' = 0$ d'où enfin $B = 0$. Donc les formules générales se réduisent alors à

$$f(z) = C\,\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\ldots\ldots\sigma(z-b_p)}$$

avec la condition unique

$$b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_p = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_p.$$

Cette relation remarquable dont la relation (13) est la généralisation a été donnée par Liouville ; elle permet de calculer un pôle quand on connait tous les autres et les zéros de la fonction.

La discussion qui précède peut se résumer dans le tableau suivant :

(14)

Espèce	Expression générale	Équations de condition
$f(z+2\omega) = e^{2\lambda z+\mu} f(z)$ $f(z+2\omega') = e^{2\lambda' z+\mu'} f(z)$	$f(z) = e^{Az^2+Bz+C}\,\dfrac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\ldots\ldots\sigma(z-b_q)}$	$\lambda\omega' - \lambda'\omega = \frac{i\pi}{2}(p-q)$ $H = 2i\pi(K\omega' - K'\omega)$
$f(z+2\omega) = e^{\mu} f(z)$ $f(z+2\omega') = e^{\mu'} f(z)$	$f(z) = e^{Bz+C}\,\dfrac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\ldots\ldots\sigma(z-b_p)}$	$E = \dfrac{\mu'\omega - \mu\omega'}{i\pi}$ $p = q$
$f(z+2\omega) = f(z)$ $f(z+2\omega') = f(z)$	$f(z) = C\,\dfrac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\ldots\ldots\sigma(z-b_p)}$	$E = 0$ $p = q$

Douzième Leçon

Propriétés des fonctions doublement périodiques.

I. — Décomposition en éléments simples. — Mr Hermite a donné, pour les fonctions de première et de seconde espèce, une expression analytique où les pôles sont mis en évidence et qui est analogue à la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples.

Toute fonction rationnelle peut s'exprimer linéairement à l'aide d'un élément simple $\frac{1}{z-a}$ et de ses dérivées ; une fonction doublement périodique peut être exprimée de la même manière à l'aide d'un élément simple convenablement choisi et des dérivées de cet élément. Considérons d'abord une fonction de première espèce ; la fonction $\zeta(z-a)$ a un pôle unique dans P et le résidu correspondant est l'unité ; nous prendrons $\zeta(z-a)$ comme élément simple.

Soient $\underline{x}$ et $\underline{b}$ deux constantes contenues dans P et considérons la fonction

$$F(z) = f(z)\left[\zeta(z-x) - \zeta(z-b)\right]$$

Cette fonction est uniforme, fractionnaire, et doublement périodique, car la constante 2η ou $2\eta'$, qui s'introduit dans $\zeta(z-x)$ par l'addition d'une période, détruit celle qui s'introduit dans $\zeta(z-b)$; $F(z)$ admet les p pôles de $f(z)$, que nous désignerons par $a_1, a_2, \ldots a_p$, et possède en outre les deux pôles simples x et b.

Exprimons que la somme des résidus correspondant à ces $p+2$ pôles est égale à 0.

1° Le résidu correspondant à $\underline{x}$ est $f(x)$;

2° Le résidu correspondant au pôle b est $-f(b)$

3° Cherchons maintenant le résidu correspondant à un pôle a de $f(z)$; on a, dans le domaine de a, α étant le degré du pôle :

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{A}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha}} + B + B_1(z-a) + B_2(z-a)^2 + \cdots\cdots$$

$$\zeta(x-z) = \zeta(x-a) - (z-a)\zeta'(x-a) + \cdots\cdots \pm \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n}\zeta^{(n)}(x-a) + \cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta(b-z) = \zeta(b-a) - (z-a)\zeta'(b-a) + \cdots\cdots \pm \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n}\zeta^{(n)}(b-a) + \cdots\cdots\cdots$$

Formons le produit $f(z)\left[\zeta(x-z) - \zeta(b-z)\right]$; dans ce produit, le coefficient

du terme $\frac{1}{z-a}$ sera le résidu cherché ; or on voit immédiatement qu'il est égal à

$$A\left[\xi(z-a)-\xi(b-a)\right]+A_1\left[\xi'(x-a)-\xi'(b-a)\right]+\dots+A_{\alpha-1}\left[\xi^{(\alpha-1)}(x-a)-\xi^{(\alpha-1)}(b-a)\right]$$

Si nous appliquons le théorème des résidus, nous aurons la relation cherchée savoir :

$$f(x)-f(b)=\sum\left\{A\xi(x-a)+A_1\xi'(x-a)+\dots+A_{\alpha-1}\xi^{(\alpha-1)}(x-a)\right\}$$
$$-\sum\left\{A\xi(b-a)+A_1\xi'(b-a)+\dots+A_{\alpha-1}\xi^{(\alpha-1)}(b-a)\right\}$$

le signe Σ indiquant qu'on doit affecter a des indices 1.2... p et faire la somme des résultats. Si on réunit en une constante C les termes indépendants de x, et qu'on remplace x par z, on a la formule de Mr Hermite.

$$(1)\qquad f(z)=C+\sum\left[A\xi(z-a)+A_1\xi'(z-a)+\dots+A_{\alpha-1}\xi^{(\alpha-1)}(z-a)\right]$$

La question se résout d'une manière analogue pour une fonction de seconde espèce aux multiplicateurs K et K'. Si on considère la fonction

$$\varphi(z)=Ce^{\rho z}\frac{\sigma(z+b)}{\sigma(z)}$$

elle admet un pôle unique $z=0$ dans P ; le résidu correspondant est $C\,\sigma(b)$ si on veut qu'il soit égal à l'unité on devra poser

$$\varphi(z)=e^{\rho z}\frac{\sigma(z+b)}{\sigma(z)\cdot\sigma(b)}$$

enfin nous supposons qu'on a déterminé ρ, ce qui est possible, de telle sorte que $\varphi(z)$ admette les multiplicateurs k, k' ; dans ces conditions $\varphi(z)$ satisfait à toutes les conditions voulues pour jouer le rôle d'élément fondamental. Considérons alors la fonction

$$F(z)=f(z)\,\varphi(x-z)$$

Elle est doublement périodique ; on a en effet :

$$F(z+2\omega)=kf(z)\times\frac{1}{k}\varphi(x-z)=F(z)$$
$$F(z+2\omega')=k'f(z)\times\frac{1}{k'}\varphi(x-z)=F(z)$$

Si nous écrivons que la somme des résidus est nulle dans P pour la fonction $F(z)$ et si nous remarquons que le résidu au pôle x est $f(x)$ nous aurons immédiatement la formule de Mr Hermite, savoir :

$$(2)\qquad f(x)=\sum\left[A\varphi(x-a)+A_1\varphi'(x-a)+\dots+A_{\alpha-1}\varphi^{(\alpha-1)}(x-a)\right]$$

Nous nous limiterons dans ce qui va suivre aux fonctions doublement périodiques et nous serons amenés à donner une nouvelle forme à la relation (15) en y introduisant la fonction elliptique $p(z)$. Mais nous devons compléter d'abord les propriétés de la fonction $p(z)$.

II — Étude de la fonction $p(z)$.

Nous savons que $p(z)$ est liée algébriquement à sa dérivée, et que de plus elle possède un théorème d'addition. Nous allons le démontrer directement et former ces deux relations

1° Équation différentielle. La relation entre $p(z)$ et $p'(z)$ est aisée à obtenir. En effet, les trois équations

$$(3) \qquad p'(z+2\omega) = p'(z) \qquad p'(z+2\omega+2\omega') = p'(z) \qquad p'(z+2\omega') = p'(z)$$

donnent immédiatement en tenant compte de ce que $p'(z)$ est une fonction impaire

$$p'(\omega) = 0 \qquad p'(\omega+\omega') = 0 \qquad p'(\omega') = 0$$

D'ailleurs p' a un pôle triple unique dans P et par suite ne peut avoir d'autres zéros que ω, ω', $\omega+\omega''$. Posons alors :

$$(4) \qquad p(\omega) = e_1 \qquad p(\omega+\omega') = e_2 \qquad p(\omega') = e_3$$

et considérons la fonction doublement périodique

$$\varphi(z) = [p(z)-e_1]\,[p(z)-e_2]\,[p(z)-e_3]$$

ω annule le premier facteur $p(z)-e_1$ et aussi sa dérivée $p'(z)$; c'est donc un zero double de $\varphi(z)$; de même ω' et $\omega+\omega'$. $\varphi(z)$ admet donc trois zéros doubles et un pôle sextuple $z=0$; elle a donc mêmes zéros et mêmes pôles que $p'^2(z)$; on a donc en désignant par C une constante.

$$(5) \qquad p'^2 = C(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)$$

il s'agit simplement de déterminer C. Or si nous nous plaçons dans le domaine de l'origine, nous aurons :

$$p = \frac{1}{z^2} + Az^2 + Bz^4 + \ldots\ldots \qquad p' = -\frac{2}{z^3} + 2Az + 4Bz^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions les deux membres de (19) par z^6 nous pourrons écrire :

$$4(1 - Az^4 - 2Bz^6 + \ldots\ldots)^2 = C(-e_1 z^2 + 1 + Az^4 + \ldots\ldots)(-e_2 z^2 + 1 + Az^4 + \ldots\ldots)(-e_3 z^2 + 1 + Az^4 \ldots)$$

et en faisant $z=0$ $C=4$. Observons en outre que le terme en z^2 manque au premier membre ; on doit donc avoir $e_1+e_2+e_3=0$. En résumé on a les deux relations

$$(6) \qquad p'^2 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3) \qquad e_1+e_2+e_3=0$$

La première des relations (20) peut s'écrire

$$(7) \qquad p'^2(z) = 4p^3(z) - g_2\,p(z) - g_3$$

en posant

$$(8) \qquad -g_2 = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 \qquad g_3 = e_1e_2e_3$$

Nous déduirons de l'équation (21) une conséquence importante ; si on a la différentie, il vient :

$$(9) \qquad 2p''(z) = 12p^2(z) - g_2$$

Dérivons de nouveau

$$p'''(z) = 12\,p(z)\,p'(z) \qquad p^{IV}(z) = 12\,p'^2(z) + 12\,p(z)\,p''(z).$$

Si nous remplaçons p'^2 et p'' par leurs valeurs en fonction de $p(z)$, $p^{IV}(z)$ se trouvera exprimé rationnellement en fonction de $p(z)$; et ainsi de suite. En résumé, toutes les dérivées à partir de la seconde inclusivement s'expriment rationnellement en fonction de $p(z)$, $p'(z)$.

2° — Théorème d'addition. — . Nous partirons de l'équation :

$$\frac{\sigma(u+v)\cdot\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\cdot\sigma^2 v} = p(v) - p(u)$$

Différentions la par logarithmes, d'abord par rapport à u, puis par rapport à v, et ajoutons :

$$(10) \qquad 2\zeta(u+v) - 2\zeta(u) - 2\zeta(v) = \frac{p'(v) - p'(u)}{p(v) - p(u)}.$$

différentions de nouveau par rapport à u, puis par rapport à v et ajoutons

$$-2p(u+v) + 2p(u) = \frac{-p''(u)\,(pv - pu) + p'u\,(p'v - p'u)}{(pv - pu)^2}$$

$$-2p(u+v) + 2p(v) = \frac{p''v\,(pv - pu) - p'v\,(p'v - p'u)}{(pv - pu)^2}$$

$$-4p(u+v) + 2pu + 2pv = \frac{(pv - pu)\,(p''v - p''u) + 2p'u.p'v - p'^2u - p'^2v}{(pv - pu)^2}$$

ou simplement

$$-4\,p(u+v) + 2pu + 2pv = \frac{p''v - p''u}{pv - pu} - \left(\frac{p'v - p'u}{pv - pu}\right)^2$$

Mais

$$p''u = 6p^2u - \frac{g_2}{2} \qquad p''v = 6p^2v - \frac{g_2}{2} \qquad p''v - p''u = 6\left(p^2v - p^2u\right)$$

Donc

$$4p(u+v) - 2pu - 2pv = \left(\frac{p'v - p'u}{pv - pu}\right)^2 - 6pu - 6pv$$

ou enfin

$$(11) \qquad p(u+v) = -\left[p(u) + p(v)\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{p'v - p'u}{pv - pu}\right]^2$$

Il suffirait maintenant d'éliminer les dérivées $p'u$, $p'v$ à l'aide de l'équation différentielle ; on obtiendrait évidemment une relation algébrique entre $p(u+v)$ pu et pv.

VI — Autre expression des fonctions doublement périodiques

La formule de Mr Hermite qui exprime linéairement $f(z)$ à l'aide de la fonction

ξ et de ses dérivées se prête avec une extrême facilité aux questions d'intégration des fonctions doublement périodiques. Nous allons montrer, conformément à un théorème de Liouville, que $f(z)$ peut s'exprimer rationnellement en fonction de $p\,z$ et $p'z$ et nous serons conduits à une nouvelle forme très commode au point de vue des transformations algébriques.

La formule (10) donne:

$$\xi(z-a) = \xi(z) - \xi(a) + \frac{1}{2}\,\frac{p'(z)+p'(a)}{p(z)-p(a)}$$

$\xi(z-a)-\xi(z)$ s'exprime donc rationnellement en fonction de $p(z)$ et $p'(z)$; comme d'ailleurs $p''(z)$, $p'''(z)$ ..... sont dans le même cas, il en sera de même de toutes les dérivées successives de $\xi(z-a)$; si nous nous reportons alors à la formule de Mr. Hermite, nous en concluerons que toute fonction $f(z)$ doublement périodique s'exprime rationnellement à l'aide de $p(z)$ et $p'(z)$[1]. On aura donc:

$$f(z) = \frac{P\,(p,\,p')}{P_1\,(p,\,p')}$$

$P\,P_1$ étant des polynômes entiers; si alors on remplace partout p'^2 par sa valeur en fonction de p, on obtiendra une expression $f(z)$ de la forme:

$$\frac{M + N\,p'(z)}{M_1 + N_1\,p'(z)}$$

M, N, M_1, N_1 étant des polynômes entiers par rapport à p; enfin, en multipliant haut et bas par $M_1 - N_1\,p'(z)$ on arrivera à la forme définitive

$$(12) \qquad f(z) = A + B\,p'(z)$$

A, B étant deux fonctions rationnelles de $p(z)$. Lorsqu'on aura ramené deux fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ à la forme précédente, il suffira d'éliminer p, p' entre les deux relations obtenues et l'expression (21) pour avoir la relation algébrique qui lie $f(z)$ et $\varphi(z)$; et nous trouvons ainsi une nouvelle démonstration de ce théorème: que deux fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes sont liées par une équation algébrique.

VII. — Propriétés des fonctions elliptiques. —

Les propriétés fondamentales de $p(z)$ appartiennent à toutes les fonctions à deux pôles ou fonctions elliptiques; soient α, β les deux pôles, z_1 l'affixe d'un point du parallélogramme; la fonction $f(z) - f(z_1)$ sera, comme $f(z)$, doublement périodique et aura les mêmes pôles; un de ses deux zéros sera évidemment z_1; donc l'autre sera $\alpha+\beta-z_1$; on aura donc $f(\alpha+\beta-z_1) - f(z_1) = 0$; si nous remarquons que z_1 est quelconque nous sommes conduits à l'équation:

$$(13) \qquad f(\alpha+\beta-z) = f(z)$$

C'est la généralisation de $p(-z) = p(z)$ puisqu'on a alors $\alpha = \beta = 0$.

---

[1] Il y aurait un terme de la forme $A\xi(z)$, A étant une constante; mais ce terme $A\xi(z)$ ne peut être doublement périodique que si $A=0$, puisque par l'addition de 2ω il augmente de $2A\eta$.

Considérons maintenant $f'(z)$. Nous aurons

$$f'(\alpha+\beta-z) = -f'(z)$$

Si donc nous faisons $z = \frac{\alpha+\beta}{2}$ nous aurons:

$$f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Or f' ne devient pas infini tant que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ne coïncide ni avec α, ni avec β, c'est-à-dire tant que $\alpha-\beta \neq 0$. En ce cas on a nécessairement:

$$f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$$

On a de même, en faisant $z = \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \tilde{\omega}\right)$, $\tilde{\omega}$ étant une demi période quelconque

$$f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \tilde{\omega}\right) = -f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \tilde{\omega}\right) = f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \tilde{\omega}\right)$$

et par suite $\frac{\alpha+\beta}{2} + \tilde{\omega}$ est encore un zéro de $f'(z)$; on connaît donc trois des zéros de $f'(z)$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} + \omega \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} + \omega'$$

le 4e s'en déduit aisément car $f'(z)$ admet les deux pôles doubles α, β le dernier zéro est donc $\frac{\alpha+\beta}{2} + \omega + \omega'$. Ceci posé, considérons la fonction

$$\varphi(z) = \left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \omega\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \omega'\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \omega + \omega'\right)\right]$$

Chacun de ces facteurs admet un zéro de $f'(z)$ a pour dérivée $f'(z)$; donc le zéro de chaque facteur est double; $\varphi(z)$ est donc une fonction à 8 pôles admettant les mêmes zéros que $f'^2(z)$; elle admet évidemment deux pôles quadruples α, β, comme $f'^2(z)$; donc on a:

$$f'^2(z) = C\varphi(z)$$

C étant une constante. Ainsi la fonction $f(z)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$(14) \qquad f'^2 = Af^4 + Bf^3 + Cf^2 + Df + H$$

Nous avons supposé $\alpha - \beta \neq 0$ — Supposons maintenant $\alpha = \beta$; en pareil cas la dérivée admet un pôle triple α; elle a encore les trois zéros $\alpha+\omega$, $\alpha+\omega'$, $\alpha+\omega+\omega'$ en raisonnant comme précédemment on est conduit à l'équation

$$(15) \quad f'^2 = A\left[f(z) - f(\alpha+\omega)\right]\left[f(z) - f(\alpha+\omega')\right]\left[f(z) - f(\alpha+\omega+\omega')\right]$$

qui est seulement du troisième degré; c'est le cas de la fonction $p(z)$.

VIII ——. La formule précédemment obtenue

$$f(z) = A + B\,p'(z)$$

subsiste quand $p(z)$ est une fonction elliptique quelconque. Ce théorème plus général est dû à Liouville; on peut encore le généraliser et énoncer le théorème suivant:

Théorème. ——. Toute fonction doublement périodique v peut être exprimée à l'aide de toute autre fonction u aux mêmes périodes primitives, et à n pôles, par une relation de la forme:

$$(16) \qquad v = P_0 + P_1 u' + P_2 u'^2 \dots + P_{n-1} u'^{n-1}$$

$P_0, P_1 \dots P_{n-1}$ étant des fonctions rationnelles de u.

Nous suivrons la même marche (voir Jordan, cours d'analyse T.II p.) que pour le théorème général démontré page 95). Considérons la fonction

$$F(z) = A_{n-1} u'^{n-1} + A_{n-2} u'^{n-2} \dots + A_1 u' + A_0 - Bv$$

$A_0, A_1 \dots A_{n-1}$, B étant des polynômes entiers en u, soit n' le nombre des pôles de v, h le degré de B; les $n+1$ polynômes sont à coefficients indéterminés. Le terme Bv a $n'+nh$ pôles; u'^K a au plus $2nK$ pôles, car le nombre de pôles de u' ne peut que diminuer si quelques uns des pôles de u se confondent; nous supposerons dès lors que A_k est du degré $h-2k$ et le nombre de pôles de $A_k u'^K$ sera au plus égal à nh. Dans ces conditions $F(z)$ sera une fonction méromorphe, doublement périodique et à $(nh+n')$ pôles. Si nous écrivons que dans son expression analytique tous les termes fractionnaires disparaissent, et que de plus $F(z_0) = 0$, nous aurons

$$nh + n' + 1$$

équations linéaires, homogènes entre les coefficients des polynômes inconnus. Or le nombre total de ces coefficients est

$$h + h + (h-2) + (h-4) \quad + (h-2n-2) = nh + h - n(n-1)$$

Il existera donc un système de coefficients qui ne seront pas tous nuls si h est choisi de telle sorte que l'on ait plus d'inconnues que d'équations c'est-à-dire

$$nh + n' + 1 < nh + h - n(n-1)$$

ou

$$h > n' + 1 + n(n-1)$$

Il est évident qu'on peut toujours satisfaire à cette condition. Mais alors les coefficients étant remplacés par les valeurs trouvées, $F(z)$ sera entière doublement périodique, et nulle au point z_0; donc $F(z)$ sera identiquement nulle et on aura:

$$v = \frac{A_0 + A_1 u' + A_2 u'^2 \quad + A_{n-1} u'^{n-1}}{B}$$

formule identique à la formule (16).

Treizième Leçon

Les fonctions $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ ..... Les fonctions sn, cn, dn.

I — Définition des fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. — Si nous posons

$$\omega_1 = \omega \qquad \omega_2 = \omega + \omega' \qquad \omega_3 = \omega'$$

$$\eta_1 = \eta \qquad \eta_2 = \eta + \eta' \qquad \eta_3 = \eta'$$

et que nous désignions par α l'un quelconque des entiers 1, 2, 3, nous aurons pour exprimer la double périodicité de σ, la relation

$$\sigma(z + 2\omega_\alpha) = -\sigma(z) e^{2\eta_\alpha (z + \omega_\alpha)}$$

ce qu'on peut écrire en posant $u = z + \omega_\alpha$

$$\sigma(u + \omega_\alpha) . e^{-\eta u} = \sigma(\omega_\alpha - u) e^{\eta u}$$

En d'autres termes la fonction $\sigma(u + \omega_\alpha) e^{-\eta u}$ est une fonction paire; nous introduisons le facteur $\frac{1}{\sigma(\omega_\alpha)}$ afin que la fonction se réduise à l'unité pour $z = 0$ et nous aurons:

$$(1) \qquad \sigma_1(u) = \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} e^{-\eta u} \qquad \sigma_2(u) = \frac{\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')} e^{-(\eta+\eta')u} \qquad \sigma_3(u) = \frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma(\omega')} e^{-\eta' u}$$

Ces fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ se rattachent immédiatement à la fonction $p(u)$. On a en effet

$$p(u) - p(v) = \frac{\sigma(u+v)\sigma(v+u)}{\sigma^2 u . \sigma^2 v}$$

D'où en faisant $v = \omega_\alpha$

$$pu - p(\omega_\alpha) = \frac{\sigma(\omega_\alpha + u) e^{-\eta u}}{\sigma u\, \sigma\omega_\alpha} \cdot \frac{\sigma(\omega_\alpha - u) e^{+\eta u}}{\sigma u\, \sigma \omega_\alpha} = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2$$

Nous poserons naturellement

$$(2) \qquad X_1 = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \qquad X_2 = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \qquad X_3 = \frac{\sigma_3 u}{\sigma_3 u}$$

et nous aurons

$$(3) \qquad pu - e_1 = X_1^2 \quad pu - e_2 = X_2^2 \quad pu - e_3 = X_3^2$$

Enfin l'équation

$$p'^2 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)$$

donne, en extrayant la racine, et en faisant $u = 0$ pour lever l'ambiguité du signe

$$(4) \qquad p'u = -2 X_1 X_2 X_3$$

II — Les fonctions X_1, X_2, X_3. — La fonction X_α^2 admet les deux périodes $2\omega, 2\omega'$, cela résulte des équations (3). On aura donc, β étant égal à 1, 2 ou 3

$$X_\alpha(u+2\omega_\beta) = \varepsilon X_\alpha(u)$$

ε étant égal à ± 1. Pour déterminer ε, faisons $u = -\omega_\beta$

$$X_\alpha(\omega_\beta) = \varepsilon X_\alpha(-\omega_\beta)$$

Observons que X_α est impair, puisque $\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3$ sont paires et σ impaire; en outre les zéros de X_α sont donnés par $\omega_\alpha + 2m\omega + 2m'\omega'$; si donc $\alpha - \beta \neq 0$, $X(\omega_\beta)$ ne sera ni nul ni infini, on aura donc $\varepsilon = -1$

Si $\beta = \alpha$ le raisonnement ne s'applique plus; mais on a alors, en dérivant

$$X'_\alpha(u+2\omega_\alpha) = \varepsilon X'_\alpha(u)$$

faisons $u = -\omega_\alpha$ et observons que ω_α étant un zéro simple de X_α n'annule pas X'_α; que de plus X' est paire, nous aurons alors $\varepsilon = +1$.

Ainsi $X, X_2\, X_3$ sont trois fonctions de seconde espèce, aux multiplicateurs $+1, -1$; il en est de même des douze rapports qu'on peut former en combinant deux à deux les fonctions $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Le tableau suivant résume les périodicité:

(A)

Fonctions				Multiplicateurs		
Impaires		Paires		ω	$\omega+\omega'$	ω'
$\frac{\sigma}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma}$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$	$\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	$+1$	-1	-1
$\frac{\sigma_2}{\sigma_2}$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_2}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$	$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$	-1	$+1$	-1
$\frac{\sigma}{\sigma_3}$	$\frac{\sigma_3}{\sigma}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	-1	-1	$+1$

Revenons aux fonctions X; les équations (3) et (4) donnent immédiatement les trois groupes de relations symétriques:

$$(5) \quad X_1^2 + e_1 = X_2^2 + e_2 = X_3^2 + e_3 = p$$

$$(6) \quad X'_1 = -X_2 X_3 \qquad X'_2 = -X_3 X_1 \qquad X'_3 = -X_1 X_2$$

$$(7) \quad (X'_\alpha)^2 = (X_3^2 + e_\alpha - e_\beta)(X_2^2 + e_\alpha - e_\gamma)$$

Remarque. — Les fonctions contenues dans le tableau (A) sont de seconde espèce pour les périodes $2\omega, 2\omega'$; comme les multiplicateurs sont $+1$

ou 1, il suffit de doubler l'une des périodes pour que chacune de ces fonctions devienne une fonction elliptique ; les périodes correspondantes aux trois lignes horizontales sont alors respectivement

$$\begin{array}{ll} 4\omega & 4\omega' \\ 4\omega & 2\omega+2\omega' \\ 4\omega & 2\omega' \end{array}$$

III — Les fonctions λ, μ, ν.

Au lieu des fonctions $X_1\ X_2\ X_3$ on considère ordinairement trois autres des rapports considérés ; on pose :

$$\lambda(u) = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \qquad \mu(u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \qquad \nu(u) = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$$

Ce sont les fonctions elliptiques normales. Les formules (5) (6) (7) donnent en y faisant

$$X_1 = \frac{\mu}{\lambda}, \quad X_2 = \frac{\nu}{\lambda}, \quad X_3 = \frac{1}{\lambda},$$

$$(8) \qquad \mu^2+e_1\lambda^2 = \nu^2+e_2\lambda^2 = 1+e_3\lambda^2$$

ou

$$(8) \qquad \mu^2+(e_1-e_3)\lambda^2 = \nu^2+(e_2-e_3)\lambda^2 = 1$$

$$(9) \qquad \lambda' = \mu\nu \qquad \mu' = -(e_1-e_3)\lambda\nu \qquad \nu' = -(e_1-e_3)\lambda\mu$$

$$(10) \qquad \lambda'^2 = \left[1-(e_1-e_3)\lambda^2\right]\left[1-(e_2-e_3)\lambda^2\right]$$

Observons encore que $\lambda(\mu)$ est impaire, μ et ν sont paires. Les propriétés essentielles de ces trois fonctions sont contenues dans le tableau suivant :

	Parité.	Périodes.		Zéros.	Pôles.
$\lambda(\mu)$	Impaire	4ω	2ω	$2m\omega+2m'\omega'$	$2m\omega+(2m'+1)\omega'$
$\mu(u)$	Paire	4ω	$2\omega+2\omega'$	$(2m+1)\omega+2m'\omega'$	$2m\omega+(2m'+1)\omega'$
$\nu(u)$	Paire	2ω	$4\omega'$	$(2m+1)\omega+(2m'+1)\omega'$	$2m\omega+(2m'+1)\omega'$

Nous ajouterons une dernière remarque. Si on fait la substitution

$$f(z) = \sqrt{e_1-e_3}\ \lambda u \qquad z = u\sqrt{e_1-e_3} \qquad \lambda'(u) = f'(z)$$

qu'on pose en même temps

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = K^2$$

l'équation (10) devient :

$$f'^2(z) = \left[1 - f^2(z)\right]\left[1 - K^2 f^2(z)\right]$$

III — Addition des arguments. — Nous terminerons ce qui concerne les fonctions elliptiques en donnant leur formule d'addition. La propriété caractéristique de la fonction σ.

$$(1') \qquad \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = pv - pu$$

contient toutes les relations algébriques entre fonctions elliptiques ; on peut en faire disparaître la fonction p et introduire des fonctions σ_α. On a en effet :

$$pv - pu = pv - e_\alpha - (pu - e_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha^2(v)}{\sigma^2 v} - \frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u}$$

si nous portons dans la formule précédente, elle devient :

$$(12) \qquad \sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma^2 u\,\sigma_\alpha^2(v) - \sigma^2 v \cdot \sigma_\alpha^2 u$$

On peut obtenir un grand nombre de relations analogues à la relation (12). Cherchons d'abord ce qui arrive quand on augmente l'argument d'une demi période dans la fonction p. La fonction

$$\left[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha\right]\left[pu - e_\alpha\right]$$

doublement périodique, et on voit immédiatement que 0 est un pôle double du 2e facteur et un zéro double du premier ; les zéros du 2e facteur sont également composés par les pôles du premier ; on en conclut que la fonction précédente se réduit à une constante C. On obtiendra cette constante en faisant $u = \omega_\beta$; on remarquera en outre que

$$\omega_\alpha + \omega_\beta \equiv \omega_\gamma$$

Le signe $\equiv$ indiquant l'égalité à une période près, on aura alors

$$(13) \qquad p(u+\omega_\alpha) = e_\alpha + \frac{(e_\gamma - e_\alpha)(e_\beta - e_\alpha)}{pu - e_\alpha}$$

Ceci posé, revenons à l'équation (12). Si nous y augmentons u de ω_α nous aurons

$$\sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v) = \sigma_\alpha^2 u\,\sigma_v^2\left[pv - p(u+\omega_\alpha)\right] = \sigma_\alpha^2 u\,\sigma^2 v\left[\frac{\sigma_\alpha^2 v}{\sigma^2 v} - \frac{(e_\gamma - e_\alpha)(e_\beta - e_\alpha)\,\sigma^2 u}{\sigma_\alpha^2 u}\right]$$

en tenant compte des formules (1) et (3). On aura donc, à cause de la relation (13)

$$(14) \qquad \sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v) = \sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\alpha^2 v - (e_\gamma - e_\alpha)(e_\beta - e_\alpha)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v$$

On peut enfin obtenir sans difficulté le produit

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v)}{\sigma u\,\sigma_\alpha u}$$

C'est en effet une fonction elliptique aux deux pôles $0, \omega_\alpha$; il en est de

de même de

$$\frac{\sigma_\beta u\, \sigma_\gamma u}{\sigma_\alpha u\, \sigma u}$$

On pourra donc écrire

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v)}{\sigma u\, \sigma_\alpha u} = A + B\,\frac{\sigma_\beta u\, \sigma_\gamma u}{\sigma u\, \sigma_\alpha u}$$

A, B étant choisis de telle sorte que les deux membres admettent un même zéro $-v$. On a ainsi

$$A + B\,\frac{\sigma_\beta(v)\ \sigma_\gamma(v)}{\sigma u\ \sigma_\alpha v} = 0$$

On en conclut, C étant une constante

$$\sigma(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v) = C\,(\sigma u\ \sigma_\alpha u\ \sigma_\beta v\, \sigma_\gamma v + \sigma_\beta u\, \sigma_\gamma u\, \sigma_\alpha u\, \sigma v)$$

et on détermine C par la méthode que nous avons employée plusieurs fois. On trouve ainsi $C = 1$, en faisant $v=0$. On aura donc

$$(15) \qquad \sigma(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v) = \sigma u\, \sigma_\alpha u\, \sigma_\beta v\, \sigma_\gamma u + \sigma_\beta u\, \sigma_\gamma u\, \sigma_\alpha v\, \sigma v$$

Si nous divisons membre à membre les deux équations (15) et (14) et que nous nous reportions aux équations de définition

$$\lambda(u) = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \qquad \mu(u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \qquad \nu(u) = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}$$

nous aurons

$$\lambda(u+v) = \frac{\sigma(u+v)\ \sigma_3(u-v)}{\sigma_3(u+v)\ \sigma_3(u-v)} = \frac{\sigma u\, \sigma_3 v\, \sigma_1 v\, \sigma_2 v + \sigma_2 u\, \sigma_1 u\, \sigma_3 v\, \sigma_v}{\sigma_3^2 u\, \sigma_3^2 v - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)\, \sigma^2 u\ \sigma^2 v}$$

ou simplement

$$(16) \qquad \lambda(u+v) = \frac{\lambda(u)\,\mu(v)\,\nu(v) + \lambda(v)\,\mu(u)\,\nu(u)}{1 - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)\,\lambda^2(u)\,\lambda^2(v).}$$

Cette formule peut servir de point de départ à une théorie complète et approfondie des trois transcendantes λ, μ, ν de même que la formule

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

la théorie des fonctions circulaires; ces dernières fonctions ne sont d'ailleurs qu'un cas particulier ou une dégénérescence des fonctions elliptiques λ, μ, ν. Nous verrons en effet plus tard qu'on peut toujours déterminer les deux périodes de telle sorte que $e_1\, e_2\, e_3$ aient des valeurs arbitraires dont la somme soit, bien entendu, égale à 0. Supposons alors qu'on ait

$$e_1 - e_3 = 1 \qquad e_2 - e_3 = K^2 \quad e_3 = -\frac{1+K^2}{3}$$

K étant une constante donnée ; les fonctions λ, μ, ν . deviennent les trois fonctions elliptiques que Jacobi a désignées par $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$. Si dans les relations fondamentales entre λ, μ, ν, nous introduisons les valeurs précédentes de e, e_2, e_3, nous aurons le groupe de formes suivant :

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{sn}^2+\mathrm{cn}^2=1 \qquad K^2\mathrm{sn}^2+\mathrm{dn}^2=1 \\ (\mathrm{sn})'=\mathrm{cn}.\mathrm{dn} \qquad (\mathrm{cn})'=-\mathrm{sn}\,\mathrm{dn} \qquad (\mathrm{dn})'=-K^2\mathrm{sn}\,\mathrm{dn} \\ \mathrm{sn}(u+v)=\dfrac{\mathrm{sn}u.\mathrm{cn}v.\mathrm{dn}v+\mathrm{sn}v.\mathrm{cn}u.\mathrm{dn}u}{1-K^2\mathrm{sn}^2u.\mathrm{sn}^2v} \end{cases}$$

Or si nous supposons que r tende vers o, dn devient la constante I, et on retrouve les formules qui servent à définir $\sin u$ $\cos u$

Remarques. — 1° La fonction $f(z)$ est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{df}{dz}=\sqrt{(1-f^2)(1-K^2f^2)}$$

En réalité c'est en partant de cette équation et, par conséquent, en suivant une marche inverse de celle que nous avons adoptee, qu'on est parvenu à la notion de la double périodicité et à la théorie des fonctions elliptiques – Nous reprendrons prochainement la question à ce point de vue.

2° La fonction σ, dans laquelle nous avons résumé toute la théorie, s'est présentée à nous sous forme d'un produit double ; cette expression très commode pour l'étude de la fonction au point de vue analytique, est insuffisante au point de vue du calcul effectif. On peut très aisément exprimer $\sigma(z)$ soit par un produit simple d'un nombre illimité de facteurs simplement périodiques, soit à l'aide d'une série de Fourier ; on trouvera dans la note ci jointe la solution de cette question, qui n'est pas essentielle dans la théorie.

Note. — . Calcul des fonctions σ. Les fonctions θ

I — Expression de $\sigma(z)$ sous forme de produit simple. —

Cherchons d'abord à mettre la fonction $\sigma(z)$ sous la forme d'un produit convergent simple, contenant une infinité de facteurs ayant pour période 2ω. Pour chaque valeur attribuée à z le produit :

$$P=\Pi'\left[\left(1-\frac{z}{w}\right)e^{\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}}\right]$$

est absolument convergent ; on en conclut, en raisonnant comme pour une série, qu'on peut l'évaluer en groupant les facteurs dans un ordre quelconque. En posant $w = 2m\omega + 2m'\omega'$ nous devrons laisser de côté la combinaison $m = m' = 0$ et envisager tous les autres systèmes de valeurs attribuées aux deux entiers m, m'.

Considérons d'abord tous les facteurs pour lesquels on a $m' = 0$; ils donnent un produit partiel P_0 qui est, lui aussi, absolument convergent ; son expression est :

$$P_0 = \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{2m\omega}\right) e^{\frac{z}{2m\omega}} \cdot e^{\frac{z^2}{8m^2\omega^2}}$$

ou

$$(1) \qquad P_0 = \frac{2\omega s}{z}\left(\frac{z}{2\omega}\right) e^{\frac{z^2}{8\omega^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^2}} = \frac{2\omega}{z} \cdot s\left(\frac{z}{2\omega}\right) e^{\frac{\pi^2 z^2}{24\omega^2}}$$

à cause des relations démontrées précédemment à l'occasion de la fonction $s(z)$.

Donnons maintenant à m' une valeur fixe, autre que 0 ; désignons par $P_{m'}$ le produit des facteurs correspondants ; nous aurons :

$$P_{m'} = \prod_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left(1 - \frac{z}{2m\omega + 2m'\omega'}\right) \cdot e^{\frac{z}{2m\omega + 2m'\omega'} + \frac{z^2}{8(m\omega + m'\omega')^2}}$$

nous ne mettons pas d'accent, car la valeur $m = 0$ ne doit plus être écartée ; posons pour un instant

$$(2) \qquad z = 2\omega u \qquad m'\omega' = \omega a$$

nous aurons :

$$P_{m'} = \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{u}{u+a}\right) e^{\frac{u}{u+a}} \cdot e^{\frac{1}{2}\frac{u^2}{(m+a)^2}}$$

ou encore

$$P_{m_1} = e^{\frac{u^2}{2}\sum_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{(m+a)^2}} \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{u}{u+a}\right)^{\frac{u}{u+a}}$$

ce qui peut s'écrire en vertu des formules relatives à $s(z)$:

$$P_{m'} = e^{-\frac{u^2}{2}\lambda'(a)} e^{u\lambda(a)} \frac{s(a-u)}{s(a)} \qquad \left[\lambda(z) = \frac{s'(z)}{s(z)}\right]$$

et en remplaçant a, u par les valeurs (11) :

$$(3) \qquad P_{m'} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2\omega}\right)^2 \lambda'\left(m'\frac{\omega'}{\omega'}\right)} \cdot \frac{s\left(m'\frac{\omega'}{\omega} - \frac{z}{2\omega}\right)}{s\left(m'\frac{\omega'}{\omega}\right)} e^{\frac{z}{2\omega}\lambda\left(m'\frac{\omega'}{\omega}\right)}$$

Nous pouvons maintenant obtenir $\sigma(z)$ on a en effet

$$\sigma(z) = z \cdot P_0 \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' P_{m'} = z \cdot P_0 \cdot \prod_{1}^{\infty} (P_{m'} \cdot P_{-m'})$$

Or dans $P_{m'} \cdot P_{-m'}$ les facteurs exponentiels se détruisent ; la fonction λ étant impaire nous poserons :

$$(4) \qquad \frac{\pi^2}{6} - \sum_{1}^{+\infty} \lambda'\left(n\frac{\omega'}{\omega}\right) = \ell$$

en mettant n au lieu de m' et nous aurons la formule cherchée, savoir :

$$(5) \quad \sigma(z) = 2\omega e^{l\left(\frac{z}{2\omega}\right)^2} s\left(\frac{z}{2\omega}\right) \prod_1^{\infty} \left[\frac{s\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{z}{2\omega}\right)}{s\left(n\frac{\omega'}{\omega}\right)} \cdot \frac{s\left(n\frac{\omega'}{\omega} + \frac{z}{2\omega}\right)}{s\left(n\frac{\omega'}{\omega}\right)} \right]$$

On peut introduire dans cette formule des fonctions circulaires ; on a en effet :

$$s(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x \qquad \sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

Il vient alors

$$(6) \qquad \sigma(z) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{l z^2}{4\omega^2}} \sin\frac{\pi z}{2\omega} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2 n\pi\frac{\omega'}{\omega}} \right)$$

II — Expression de $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$.

— La formule (6) montre que le produit

$$\sin\frac{\pi z}{2\omega} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2 n\pi\frac{\omega'}{\omega}} \right) = \varphi(z)$$

est convergent pour toute valeur de z et définit une fonction de 3e espèce de la forme

$$C\,\sigma(z)\, e^{Az^2 + Bz}$$

On peut alors partir de ce résultat et déterminer après coup les constantes A, B, C ; on remarque d'abord que $\varphi(z) : \sigma(z)$ est une fonction paire ce qui donne $B = 0$. On obtient ensuite C en remplaçant σ par son développement

$$\sigma(z) = z + a z^6 + b z^7 + \ldots\ldots\ldots$$

divisant par z et faisant $z = 0$. On trouve ainsi $c = \frac{\pi}{2\omega}$. Prenant enfin la dérivée logarithmique et faisant $z = \omega$, on obtient $A = -\frac{\eta}{2\omega}$ on en conclut :

$$\sigma(z) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi(z)$$

ce qui donne une nouvelle valeur de la constante l ; on a, en comparant à la formule (4)

$$\sum_1^{\infty} \lambda'\left(n\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{\pi^2}{6} - 2\eta\omega$$

La même méthode permet alors d'avoir $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ sous forme de produits simples. Un simple changement de la constante ω' montre que les trois produits

$$(7) \quad \varphi_1 = \cos\frac{\pi z}{2\omega} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\frac{n\pi\omega'}{\omega}} \right) \quad \varphi_2 = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{\omega'}{\omega}} \right) \quad \varphi_3 = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{\omega'}{\omega}} \right)$$

sont convergents et définissent des fonctions de troisième espèce ; ces fonctions ont respectivement les mêmes zéros que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. — On obtiendra donc σ_α en multipliant φ_α

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

par une exponentielle de la forme e^{Az^2+Bz+C}. — La méthode des coefficients indéterminés fournit les trois constantes par un calcul identique à celui qui précède. On trouve ainsi :

$$(8)\quad \sigma(z) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi(z) \quad \sigma_1(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi_1(z) \quad \sigma_2(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi_2(z) \quad \sigma_3(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi_3(z)$$

Ce qu'on peut résumer dans la formule unique :

$$(9)\qquad e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} = \frac{\pi}{2\omega} \frac{\sigma(z)}{\varphi(z)} = \frac{\sigma_\alpha(z)}{\varphi_\alpha(z)}$$

Remarques.

— 1° Si on suppose que la période $2\omega'$ augmente indéfiniment par des valeurs imaginaires, nous savons que

$$\frac{1}{\sin^2 n\pi \frac{\omega'}{\omega}}$$

tend vers 0 pour chaque valeur attribuée à n ; il en est évidemment de même des trois exponentielles.

$$\frac{1}{\cos^2 n\pi \frac{\omega'}{\omega}} \quad \frac{1}{\cos^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \frac{\omega'}{\omega}} \quad \frac{1}{\sin^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \frac{\omega'}{\omega}}$$

On en conclut que tous les produits Π se réduisent à l'unité ; les fonctions $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ dégénèrent respectivement en :

$$\frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \sin \frac{\pi z}{2\omega},\ e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \cos \frac{\pi z}{2\omega},\ e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}},\ e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}}$$

et deviennent simplement périodiques ; si la seconde période 2ω devient aussi infinie ces fonctions deviennent $z, 1, 1, 1$.

2° Si on attribue à z des valeurs réelles, on voit que la fonction impaire $\sigma(z)$ n'a d'autres zéros que $0, \pm 2\omega, \pm 4\omega \ldots$; elle se comporte comme $\sin \frac{z\pi}{2\omega}$ de même la fonction $\sigma_1(z)$ qui est paire, ne s'annule pour des valeurs réelles de z que si ω est réel et pour les valeurs qui annuleraient $\cos \frac{\pi z}{2\omega}$; nous pourrons donc dire que cette fonction, pour des valeurs réelles de z, se comporte comme $\cos \frac{\pi z}{2\omega}$

Au contraire, ω étant toujours supposé réel, et par suite ω' imaginaire, il est visible que $\sigma_2\ \sigma_3$ n'auront pas de zéros réels ; ce sont des fonctions paires ; on en conclut que les fonctions $\lambda(z)$, $\mu(z)$ se comportent respectivement comme un sinus et un cosinus (mais seulement quand z ne prend que des valeurs réelles et que ω est réel).

II — Les fonctions Θ.

— Toute fonction de 3e espèce, entière, et ayant un seul zéro a dans le parallélogramme des périodes peut être mise sous la forme

$$(1)\qquad \varphi(z) = \sigma(z-a)\, e^{Az^2+Bz+C}$$

ce qui, en posant $z-\alpha=u$ peut s'écrire

$$(2)\quad \sigma(u)=\varphi(u+\alpha)e^{Mu^2+Nu+P}$$

Il y a donc réciprocité et on en conclut que la fonction $\varphi(z)$ aurait pu, au même titre que la fonction σ, être prise comme point de départ de la théorie des fonctions doublement périodiques. C'est même ce qui est arrivé en réalité : Abel et Jacobi ont fondé cette théorie sur l'étude des fonctions nouvelles auxquelles nous allons parvenir ; d'après la relation (2) si $\varphi(u)$ est entière et admet la période 2ω elle sera exprimable par une série de Fourier, convergente dans tout le plan et par suite nous aurons résolu le problème que nous avons en vue : exprimer σ à l'aide d'une série très simple à termes périodiques. On nomme fonction intermédiaire ou fonction Θ toute fonction entière qui satisfait aux deux relations

$$(3)\quad \varphi(z+2\omega)=\varphi(z) \quad \varphi(z+2\omega')=\mu e^{2\lambda z}\varphi(z)$$

Une pareille fonction étant de troisième espèce, si on désigne par K le nombre de ses zéros dans un parallélogramme, on aura (page 105)

$$(4)\quad \lambda=-\frac{iK\pi}{2\omega}$$

Nous allons chercher d'abord l'expression générale des fonctions Θ. En tenant compte de la première des relations (3) on peut écrire

$$(5)\quad \varphi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{n\pi z i}{\omega}}$$

et il faut déterminer les coefficients A_n. Or on a

$$\varphi(z+2\omega')=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{n\pi z i}{\omega}}\cdot q^{2n} \quad \text{en posant } q=e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$$

D'autre part

$$\mu e^{-\frac{iK\pi z}{\omega}}\varphi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mu A_n e^{\frac{n\pi z i}{\omega}-\frac{K\pi z i}{\omega}}$$

Egalons les termes de même degré dans les deux développements, nous aurons :

$$(6)\quad \mu A_n = A_{n-K}\cdot q^{2(n-K)}$$

Telle est la loi des coefficients ; elle montre que dans le développement figurent seulement K coefficients arbitraires

$$A_0\ A_1\ A_2\ \dots\ A_{K-1}$$

les autres s'en déduisant par voie de récurrence.

Reste à voir si la série (5) ainsi déterminée est convergente. Il est commode de poser :

$$A_n = q^{\frac{n^2}{K}} B_n$$

la relation (6) devient alors:

$$\mu \cdot B_n = q^{-K} B_{n-K}$$

Nous supposerons pour simplifier $\mu = q^{-K}$; on aura simplement

$$(7) \quad B_n = B_{n-K}$$

Ceci posé considérons $u_n^{\frac{1}{n}}$, u_n étant le terme général de la série (ρ); B_n est l'une des constantes $B_0\, B_1\, B_{K-1}$; son module reste donc fini quand n augmente indéfiniment. Si on pose $\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + i\beta$ on a:

$$\left|u_n^{\frac{1}{n}}\right| = \left|B_n\right| \left|e^{\frac{\pi z i}{\omega}}\right| \left|q^{\frac{n}{K}}\right|$$

et la partie de ce module qui varie avec n est $e^{-n\frac{\beta\pi}{k}}$; elle tend vers o si β est positif, ainsi que nous l'avons toujours supposé. Donc la série (ρ) est absolument convergente pour toute valeur de z; elle définit donc bien une fonction intermédiaire.

IV. – Relations entre les fonctions σ et les fonctions Θ. —

Le cas le plus simple est celui où $K = 1$, $B_0 = 1$ on est ainsi conduit à une fonction

$$(8) \quad F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos\frac{n\pi z}{\omega}$$

Elle satisfait aux conditions suivantes

$$(9) \quad F(z) = F(-z) \qquad F(z+2\omega) = F(z) \qquad F(z+Q+\omega') = i\pi\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{q} F(z) e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$$

Si nous faisons dans la seconde de ces relations $z = \omega' - \omega$ et dans la dernière $z = \omega - \omega'$ nous aurons

$$F(\omega+\omega') = F(\omega'-\omega) \qquad F(\omega'+\omega) = \frac{1}{q} F(\omega'-\omega\; e^{+i\pi\left(\frac{\omega'}{\omega}-1\right)} = -F(\omega'-\omega)$$

On en conclut $F(\omega+\omega') = 0$. En d'autres termes la fonction $F(z)$ admet les mêmes zéros que $\sigma_2(z)$; il en résulte que $F(z+\omega')$ s'annule pour $z = \omega'$ et par suite aura les mêmes zéros que $\sigma_2(z)$; de même $F(z+\omega')$ aura pour zéro ω et par suite correspondra à σ; enfin $F(z+\omega+\omega')$ aura les mêmes zéros que $\sigma(z)$. Nous poserons alors

$$(10) \qquad F_2(z) = F(z) \quad F_3(z) = F(z+\omega) \quad F_1(z) = F(z+\omega') \quad F_0(z) = F(z+\omega+\omega') \; \sigma(z) = \sigma_0(z)$$

On aura alors

$$\sigma_\alpha(z) = e^{Az^2+Bz+C} F_\alpha(z)$$

nous nous bornerons à déterminer $A\,B\,C$ pour l'une des valeurs de α, par exemple pour $\alpha = 2$

Le calcul se ferait de même dans les autres cas. Prenons donc le cas où $\alpha = 2$. La fonction F_2 est paire, aussi bien que σ_2; donc $B = 0$. On a alors

$$(11) \quad \sigma_2(z) = e^{Az^2+C} F(z)$$

comme $\sigma_2(0)=1$, on a d'abord $e^c = \frac{1}{F(0)}$. On a ensuite (Tableau page 115)

$$\frac{\sigma_2(z+2\omega)}{\sigma(z+2\omega)} = -\frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)} \qquad \sigma_2(z+2\omega) = e^{2\eta(z+\omega)}\sigma_2(z) \quad \sigma_2(2\omega) = e^{2\eta\omega}$$

On aura donc, en augmentant z de 2ω dans l'identité (11) et égalant les facteurs exponentiels

$$A(z+2\omega)^2 + C = 2\eta z + 2\eta\omega + Az^2 + C + 2ik\pi$$

D'où, en égalant les coefficients de z : $4A\omega = 2\eta$. On aura en définitive

$$\sigma_2(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \cdot \frac{F_2(z)}{F_2(0)}$$

On obtiendra ainsi toutes les exponentielles ; voici les résultats dans les quatre cas que l'on doit considérer

1° $\sigma_2(z)$ – On a

$$F_2(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos\frac{n\pi z}{\omega}$$

$$\sigma_2(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{F_2(z)}{F_2(0)}$$

2° $\sigma_3(z)$ – On a ici

$$F_3(z) = F_2(z+\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} e^{ni\pi} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos\frac{n\pi z}{\omega}$$

$$\sigma_3(z) = Fe^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{F_3(z)}{F_3(0)}$$

3° $\sigma_1(z)$ – On a ici

$$F_1(z) = F(z+\omega') = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2+n} e^{\frac{n\pi z i}{\omega} - \frac{1}{4}} = e^{-\frac{\pi z i}{2\omega}} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\pi z i}{\omega}}$$

ou encore :

$$F_1(z) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi z i}{2\omega}} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{m^2}{4}} e^{\frac{m^2}{2}\frac{\pi z i}{\omega}} \quad (m \text{ impair})$$

Quatorzième Leçon.

Fonctions algébriques

I —— Nous aborderons maintenant l'étude des fonctions multiformes ; celles que nous avons définies (page 15 et suivantes) sont déterminées par une équation de la forme $f(z,u)=0$, f étant une fonction holomorphe par rapport aux deux variables z, u ; nous commencerons par démontrer l'existence de pareilles fonctions implicites, et par préciser leur définition.

Supposons $f(z,u)$ holomorphe pour tous les systèmes de valeurs de z, u, appartenant à deux aires données $S'S''$; soit a, b un pareil système de valeurs ; si pour $z=a$, $u=b$, la fonction s'annule, je dis que la racine $u=b$ est d'un degré fini de multiplicité. En effet, dans le domaine de b, la fonction $f(z,u)$ où z est supposée constante, peut se mettre sous la forme

$$f(z,u) = \varphi_0(z) + (u-b)\varphi_1(z) + (u-b)^2\varphi_2(z) + \ldots\ldots\ldots$$

Si pour $z=a$, $\varphi_0(z)$ s'annule, b devient racine de l'équation ; si tous les φ s'annulaient à la fois, la fonction $f(a,u)$ serait d'après ce que nous savons sur les fonctions d'une seule variable, identiquement nulle dans l'aire S''. D'autre part on peut écrire de même dans le domaine de $z=a$

$$f(z,u) = \psi_0(u) + (z-a)\psi_1(u) + \ldots\ldots$$

$\psi_0(u)$ étant égal à $f(a,u)$ serait identiquement nul ; on en conclut que $\frac{f(z,u)}{z-a}$ serait holomorphe dans le domaine de $z=a$ pour toute valeur de u contenue dans S'' ; il est clair qu'il en serait de même a fortiori pour les autres valeurs de z. Donc la fonction $\frac{f(z,u)}{z-a}$ serait holomorphe dans le champ S',S'' ce qu'on peut exprimer en disant que $f(z,u)$ serait divisible par $z-a$. Si donc nous supposons, comme nous le ferons toujours que $f(z,u)$ n'est pas divisible par une fonction de z, l'équation $f(z,u)=0$ n'aura pour chaque valeur de z que des racines d'un ordre entier et fini de multiplicité ; ces racines seront d'ailleurs isolées les unes des autres, la fonction $f(z,u)$ où z est constant étant holomorphe par rapport à u.

Nous démontrerons maintenant le théorème fondamental sur lequel repose la définition des fonctions implicites.

Théorème —— Si l'équation $f(z,u)=0$ admet pour $z=a$, n racines égales à b, pour z voisin de a, elle aura n racines, et seulement n, voisines de b.

En d'autres termes étant donné un cercle de rayon r' décrit du point b comme centre, on pourra, pourvu que r' soit inférieur à une certaine

limite lui faire correspondre un cercle de centre a, et de rayon r, tel que, z restant à l'intérieur du second cercle, l'équation ait toujours n racines dans l'intérieur du premier cercle, et pas davantage

Nous pouvons, sans nuire à la généralité du raisonnement supposer a et b nuls, car cela revient à faire la substitution $z = a + z'$ $u = b + u'$. Ceci posé, nous aurons dans le domaine $u = 0$

$$(1) \qquad f(z,u) = \varphi_0(z) + u\varphi_1(z) + u^2\varphi_2(z) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

les fonctions φ étant holomorphes dans l'aire S et satisfaisant aux conditions

$$(2) \qquad \varphi_0(0) = 0 \quad \varphi_1(0) = 0 \quad \varphi_2(0) = 0 \ldots\ldots \varphi_{n-1}(0) = 0 \quad \varphi_n(0) \neq 0$$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$(3) \qquad f(z,u) = u^n \varphi_n(z) \left[1 + P + Q\right]$$

si on pose :

$$(4) \qquad P = \frac{1}{u^n}\,\frac{\varphi_0(z)}{\varphi_n(z)} + \frac{1}{u^{n-1}}\,\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_n(z)} + \ldots\ldots + \frac{1}{u}\,\frac{\varphi_{n-1}(z)}{\varphi_n(z)}$$

$$(5) \qquad Q = u\,\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} + u^2\,\frac{\varphi_{n+2}(z)}{\varphi_n(z)} + \ldots + u^p\,\frac{\varphi_{n+p}(z)}{\varphi_n(z)} + \ldots\ldots$$

Nous pouvons supposer qu'on restreigne l'aire S de telle sorte que $\varphi_n(z)$ n'ait aucun zéro dans cette aire ; dans ce cas $|\varphi_n(z)|$ restera supérieur à un nombre fixe δ ; en outre les fonctions holomorphes φ conserveront toutes dans S et sur son contour un module inférieur à un nombre fixe M ; il est bien évident que ces limites δ, M s'appliqueront à fortiori à toute aire intérieure à S.

Faisons décrire à la variable u, la circonférence d'un cercle de rayon $r' < 1$ ayant 0 pour centre, nous aurons, quel que soit z :

$$|Q| < \frac{M}{\delta}(r' + r'^2 + \ldots) = \frac{M}{\delta}\,\frac{r'}{1 - r'}$$

et nous supposerons dès maintenant r' inférieur à $\frac{\delta}{\delta + 2M}$, d'où nous déduirons $|Q| < \frac{1}{2}$. Supposons maintenant r' choisi arbitrairement au-dessous de la limite qu'on vient d'indiquer ; les fonctions $\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$ s'annulant pour $z = 0$, et étant continues, on pourra déterminer un cercle de rayon r tel que dans ce cercle toutes ces fonctions aient des modules moindres que

$$\frac{\delta}{2}\;\frac{1}{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r'^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{r'^n}} = H$$

Pour toute valeur de z intérieure à ce cercle on aura

$$|P| < \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{r'^n}\right) \times H \text{ ou. } |P| < \frac{1}{2}$$

Dans ces conditions, d'après l'équation (3) on aura, sur toute la circonférence de rayon r'

$$\left|\frac{f(z,u) - u^n \varphi_n(z)}{u^n \varphi_n(z)}\right| = |P+Q| < 1$$

Donc, d'après un lemme dont nous nous sommes servi à plusieurs reprises (Voir page 69) les deux équations

$$f(z,u) = 0 \qquad u^n \varphi_n(z) = 0$$

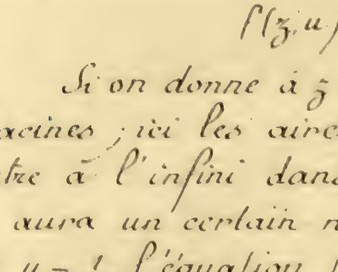
auront le même nombre de racines dans le cercle de rayon r'. Il en résulte évidemment que $f(z,u) = 0$ a n racines dans ce cercle ; le théorème est donc démontré.

II — Définition de la fonction algébrique —

Considérons le cas particulier où f est un polynôme entier par rapport à z, u. Soit

$$f(z,u) = A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + \ldots + A_{m-1} u + A_m.$$

Si on donne à z une valeur quelconque, l'équation $f(z,u) = 0$ aura m racines ; ici les aires désignées plus haut par S, S' s'étendent l'une et l'autre à l'infini dans tous les sens ; si z vérifie l'équation $A_0 = 0$, l'équation aura un certain nombre de racines infinies, en d'autres termes, si on pose $u = \frac{1}{v}$ l'équation $f(z, \frac{1}{v}) = 0$ aura des racines nulles ; d'autre part, si $R(z)$ est le résultant des deux polynômes $f(z,u)$, $\frac{\partial f}{\partial u}$ l'équation $R(z) = 0$ déterminera les seuls points où l'équation puisse avoir des racines multiples ; ces racines pourront d'ailleurs être finies ou infinies, car une même valeur de z pourra annuler à la fois les deux polynômes R et A_0 ; nous appellerons points critiques, les points ayant pour affixes les racines de l'équation $A_0 R = 0$.



1° Supposons maintenant que z reste à l'intérieur d'une aire S ne renfermant aucun point critique ; soit z_0 un point quelconque de cette aire, u_0 l'une des racines correspondantes ; d'après notre hypothèse cette racine est simple et finie. Faisons décrire à z une ligne continue ; quand on passera au point z_1 infiniment voisin de z_0, l'équation aura m nouvelles racines dont une et une seule u_1 infiniment voisine de u_0 ; quand on passera de z_1 à z_2 il y aura de même une racine u_2 et une seule voisine de u_1, et ainsi de suite ; la suite continue des valeurs $u_0\, u_1, u_2 \ldots U$ correspondant aux valeurs $z_0, z_1, z_2 \ldots Z$ constitue une fonction de z, continue le long du chemin considéré ; l'ensemble de toutes ces suites quand C varie, définit u comme

une fonction de z, continue dans S.

2° Nous allons prouver maintenant que cette fonction est uniforme. Il suffit pour cela de faire voir que si le chemin C se ferme, on retrouve en z_0 la valeur u_0 de la fonction. Or dans S le module de la différence des racines de $f(z, u) = 0$, prises deux à deux n'est jamais nul; il reste donc supérieur à un certain nombre λ. — Autour d'un point ξ quelconque de l'aire S on peut décrire un cercle de rayon r, tel que z restant dans ce cercle, l'équation ait une seule racine dans chaque cercle décrit autour d'un des points racines correspondants, avec un rayon $r' < \lambda$; de plus, ce nombre r, déterminé comme on l'a vu plus haut, à l'aide des quantités M et δ sera évidemment indépendant de la valeur ξ considérée; si maintenant, on fait décrire à la variable z un chemin fermé contenu dans un cercle de rayon r, chacune des racines variera d'une quantité inférieure en module à λ; elle reprendra donc sa valeur initiale.

Il est clair d'ailleurs que si on divise l'aire C en aires partielles par des transversales, la variation d'une racine déterminée, pour tout le contour de C, sera égale à la somme des variations relatives aux contours des aires partielles. Nous pouvons alors, par deux séries de droites parallèles, diviser l'aire S en un nombre fini de carrés complets ou incomplets ayant une diagonale inférieure à $2r$. Dans ces conditions, d'après ce qui précède, la variation de chaque racine sera nulle pour le contour de chaque carré, et par suite pour le contour entier de l'aire C, puisque le nombre des carrés est fini; donc chaque racine est une fonction continue et uniforme de z.

3° Je vais démontrer enfin que cette fonction est analytique. — Soit en effet, z_0 un point quelconque de S, u_0 la racine correspondante, h, k, un système d'accroissements correspondants, on aura

$$f(z_0, u_0) = 0, \quad f(z_0 + h, u_0 + k) = 0.$$

La seconde équation est une équation entière entre h et k, et peut s'écrire:

$$h\,\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} + k\,\overline{\frac{\partial f}{\partial u}} + \frac{1}{2}\left(h^2\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} + 2kh\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial u}} + k^2\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}\right) + \dots = 0$$

le signe — indiquant qu'on doit faire $z = z_0$ $u = u_0$; si nous posons $\frac{k}{h} = v$ on peut écrire

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} + v\,\overline{\frac{\partial f}{\partial u}} + \frac{h}{2}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} + 2v\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial u}} + v^2\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}\right) + \dots = 0$$

Cette équation algébrique entre v et h; pour $h = 0$, elle a une racine

simple égale à

$$v_0 = -\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial u_0}}\right)$$

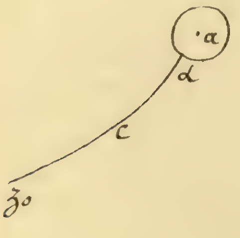
Donc, si h est infiniment petit, une racine et une seule de l'équation en v tend vers la valeur v_0 ; on en conclut que v a pour limite v_0 ou en d'autres termes que le rapport $\frac{k}{h}$ a pour limite v_0 ; donc la quantité variable u, considérée comme fonction de z a une dérivée v_0 parfaitement déterminée ; c'est donc une fonction analytique.

En résumé, chaque racine de l'équation $f(z, u) = 0$ sera une fonction holomorphe tant que z restera à l'intérieur d'une courbe fermée ne contenant aucun point critique.

III — Fonctions uniformes. —. D'après cela, c'est parmi les points critiques, ou en d'autres termes, parmi les solutions de l'équation :

$$R(z) A_0(z) = 0$$

que peuvent se trouver les points singuliers de la fonction ; soit donc a l'un de ces points — Imaginons un chemin continu C partant d'un point z_0 et venant aboutir aux environs de a ; en z_0 l'équation a en général m racines $u_0\, u_1\, u_2 \ldots u_{m-1}$; nous supposons qu'on choisisse exclusivement l'une d'elles pour valeur initiale ; ce sera par exemple u_0. Quand on arrivera au point α voisin de a, on sera parvenu par continuité à une valeur v_0 de la fonction ; nous désignerons de même par $v_1\, v_2 \ldots v_{m-1}$ les valeurs auxquelles on serait arrivé si on avait pris pour valeurs initiales, respectivement $u_1, u_2 \ldots u_{m-1}$



Supposons qu'au point a, l'équation ait une seule racine infiniment voisine de v_0 ; dans ce cas il n'y aura aucune difficulté : si cette racine est finie, elle donnera en a la valeur de la fonction on pourra prolonger le chemin C en franchissant le point a ; au-delà, on trouvera une valeur et une seule infiniment voisine de la valeur en a, la fonction restera bien déterminée, continue, etc... ; si la racine en question était infinie, l'équation $f\left(\frac{1}{u}, z\right) = 0$ aurait une seule racine nulle en a, une seule racine infiniment petite en α ; la racine considérée aurait donc le point a pour pôle.

Supposons maintenant qu'au point a l'équation ait n racines égales à b ; si v_0 n'est pas voisin de b, il n'y aura encore aucune difficulté ;

a ne sera pas un point singulier pour la racine considérée; mais si v_0 fait partie du groupe des n racines qui en α sont infiniment voisines de b, lorsqu'on voudra prolonger C jusqu'en a, on aboutira à ce point avec la valeur b, si ensuite on veut prolonger C audelà de a, on se trouvera en présence de n valeurs infiniment voisines de b; en d'autres termes, la courbe représentative de u se partagera en n branches distinctes et rien n'indiquera suivant laquelle de ces branches on devra suivre la marche de la fonction. Le point a sera donc un point singulier de la fonction; la singularité consistant dans une incomplète détermination. C'est ce qu'on nomme un point d'embranchement.

Il est facile, à l'aide d'une coupure, de rendre holomorphe toute racine de l'équation; si on désigne par $a_1, a_2 \ldots a_p$ les différents points critiques, on pratiquera dans le plan une coupure à l'aide d'un trait continu allant de a_1 à a_2, de a_2 à $a_3 \ldots$ de a_p à l'infini; en interdisant à la variable de rencontrer jamais cette ligne on aura un champ de variation dans lequel l'équation $f(z,u) = 0$, de degré m par rapport à u, définira m fonctions distinctes dont chacune sera holomorphe.

Mais en opérant de la sorte, on perd de vue la liaison qui unit les m fonctions ainsi définies et leur origine commune; cette séparation est donc tout à fait artificielle, et il est préférable de considérer l'équation $f(z,u)=0$ comme définissant une seule fonction multiforme. Nous allons voir comment on y est conduit.

IV — Une seule fonction multiforme. —

Nous supposerons maintenant que la variable z peut se mouvoir librement dans le plan tout entier, un cercle de rayon aussi petit qu'on voudra étant supprimé autour de chacun des points $a_1, a_2 \ldots \ldots a_p$; dans le champ ainsi défini, nous allons voir que l'équation définit une fonction multiforme à m déterminations.

Supposons qu'étant parti de z_0 avec la valeur u_0 on arrive en α avec la valeur v_0, infiniment voisine de b; soient $v_0\ v_1 \ldots v_{n-1}$ les racines infiniment voisines de b qui correspondent à ce point α; si nous tournons une première fois autour de a nous reviendrons en α avec l'une des valeurs $v_0\ v_1\ v_2 \ldots v_{n-1}$; si c'est v_0 que nous retrouvons, le même fait se reproduira indéfiniment puisqu'au début de chaque tour on se retrouvera dans les mêmes conditions; en d'autres termes la racine considérée sera uniforme et n'aura pas de singularité au point a; supposons qu'un premier tour amène une autre racine v_1; alors un second tour ne pourra ramener v_1, sinon en tournant en sens contraire on retrouverait indéfiniment v_1 et nous

savons qu'il existe un mouvement qui peut nous faire passer de v_1 à v_0 ; donc après un second tour, on sera ramené à v_0 ou à une racine autre que v_0, v_1 ; si on retrouve v_0 on retrouvera indéfiniment v_1 puis v_0 puis v_1 .... et ainsi de suite, les deux racines s'échangeant alternativement ; supposons que le second tour amène une nouvelle racine v_2 ; alors un troisième ne pourra ramener ni v_2 ni v_1 car en tournant en sens contraire, on ne retrouverait jamais que v_1 et v_2 et nous savons qu'on doit pouvoir retrouver v_0 ; le troisième tour ramènera donc v_0 ou une racine v_3 distincte de $v_0 v_1 v_2$; si c'est v_0 on se retrouvera dans les conditions initiales ; on retrouvera donc indéfiniment et toujours dans le même ordre les trois racines v_0, v_1, v_2 et ainsi de suite ; en résumé les n racines infiniment voisines qui correspondent à un point critique forment, lorsqu'on tourne autour de ce point, un ou plusieurs systèmes circulaires.

Si partant de z_0 nous nous dirigeons suivant C jusqu'en α, que nous fassions un tour complet autour de a, et que nous revenions ensuite de α en z_0 suivant le même chemin C, le contour fermé ainsi défini s'appellera un lacet ; z_0 est l'origine, a l'extrémité de ce lacet.

Si la racine v_0 en α s'échange avec une autre v_1 après un tour, il est clair que le chemin αz_0 nous ramènera au point de départ avec la valeur u_1 au lieu de u_0 ; nous dirons alors que le lacet a échange les racines u_0, u_1 ; d'une manière générale si v_0 fait partie d'un groupe de p valeurs se permutant circulairement autour de a, il suffira de décrire p fois de suite le lacet pour obtenir en z_0 successivement les valeurs $u_0 u_1 \dots u_{p-1}$. Un lacet permettra donc d'échanger circulairement entre-elles, un certain nombre des m valeurs $u_0 u_1 \dots u_{m-1}$; un système formé de plusieurs lacets consécutifs pourra permettre d'en échanger un plus grand nombre.

Considérons maintenant un point Z quelconque du plan ; on peut aller de z_0 à Z par un chemin particulier, par exemple suivant la droite $z_0 Z$; tout autre chemin allant de z_0 à Z peut être déformé sans franchir aucun point critique de manière à être composé de ce chemin rectiligne précédé d'une ligne fermée C allant de z_0 à z_0 ; ce chemin C peut évidemment être lui-même réduit d'une manière continue, et sans franchir aucun point critique, à coïncider avec un certain système de lacets parcourus dans des sens convenables ; en somme, tout chemin allant de z_0 en Z se réduira au chemin rectiligne précédé d'un système de lacets.

Soient maintenant $U_0\ U_1\ U_2 \dots U_{m-1}$ les racines de $f(u,Z)=0$, U_i étant la valeur à laquelle on arriverait par continuité en suivant le

chemin rectiligne avec u_i comme valeur initiale ; nous démontrerons tout à l'heure qu'il existe un système de lacets ayant z_0 comme origine et permettant de passer de u_0 à toutes les autres racines u_1 u_2 .... u_{m-1} ; d'après cela en faisant varier convenablement le chemin $z_0 Z$ on pourra, par continuité, et tout en partant de la valeur initiale u_0 aboutir en Z avec l'une quelconque des valeurs U_0 U_1 .... U_{m-1} ; nous acquérons ainsi la notion d'une fonction multiforme susceptible de m valeurs distinctes en chaque point du plan et satisfaisant constamment à l'équation $f(u, z) = 0$ c'est cette fonction multiforme qu'on désigne sous le nom de fonction algébrique.

Points singuliers algébriques. — La fonction multiforme algébrique admet deux espèces de points singuliers, des pôles et des points critiques tels que, dans le voisinage de chacun d'eux il y ait p valeurs de la fonction qui tendent d'une manière continue vers une limite commune b finie ou non ; nous donnerons le nom de points singuliers algébriques à ces deux espèces de points singuliers ; le point à l'infini ne peut être lui-même qu'un point ordinaire ou un point singulier algébrique, car l'équation $f\left(u, \frac{1}{z}\right) = 0$ est algébrique et par suite le point $z = 0$ est ordinaire ou algébrique.

En résumé, une fonction algébrique n'a, à distance finie ou infinie que des singularités algébriques ; la réciproque est vraie et peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème — Toute fonction multiforme, qui n'a en chaque point du plan, qu'un nombre fini de valeurs, et qui n'admet, à distance finie ou infinie, que des singularités algébriques, est une fonction algébrique.

Remarquons d'abord que si, en un point non singulier M, la fonction admet m valeurs, elle en admettra m en un point M' infiniment voisin de M, car chacune des déterminations est supposée varier d'une manière continue ; on en conclut que le nombre des valeurs de la fonction est le même pour tout les points non singuliers. Soit m ce nombre, z_0 un point arbitraire pris pour origine, u_0 u_1 .... u_{m-1} les valeurs de la fonction en ce point, a l'un quelconque des points singuliers ; nous pourrons à l'aide de chaque point a constituer un lacet ayant z_0 pour origine et ce lacet ne pourra avoir d'autre effet que d'échanger entre elles certaines des valeurs u_0 u_1 .... u_{m-1} ; la démonstration que nous avons donnée résulte en effet de la continuité des différentes valeurs de la fonction dans les environs de a et nullement de son origine algébrique.

Soit H une fonction entière et symétrique des m valeurs de

la fonction ; H est évidemment une fonction continue et analytique de z ; mais il est aisé de voir que cette fonction est de plus uniforme ; en effet, tout chemin allant de z_0 à un point Z quelconque peut être remplacé par le chemin rectiligne $z_0 Z$ précédé d'un système déterminé de lacets ayant z_0 pour origine ; mais ce système de lacets ramènera en z_0 une valeur unique et parfaitement déterminée de H, puisque son effet étant de permuter entre elles certaines des valeurs $u_0\, u_1 \ldots u_{m-1}$ ne peut avoir d'influence sur la fonction symétrique. On en conclut que H est une fonction holomorphe de z sauf aux points où une ou plusieurs valeurs de la fonction donnée seraient infinies ; mais un pareil point sera nécessairement un pôle pour H ; le point à l'infini étant supposé de même nature que les points à distance finie, la fonction H n'aura d'autres singularités que des pôles, à distance finie ou infinie. — Ce sera donc une fonction rationnelle.

Ceci posé, désignons par S_q la somme des produits q à q des valeurs de la fonction $f(z)$ donnée ; on aura évidemment pour toute valeur de z :

$$f^m(z) - S_1 f^{m-1}(z) \ldots\ldots + (-1)^m S_m = 0$$

Donc $f(z)$ sera lié à z par une équation entière, ce qu'il fallait prouver.

Remarque. — 1°. — Il résulte de ce théorème que, étant donnée une équation entière $f(z, u) = 0$ irréductible c'est-à-dire ne pouvant être scindée en deux équations entières, il existe toujours un système de lacets fondamentaux c'est-à-dire permettant de passer d'une valeur de la fonction à toutes les autres ; en effet, soit z_0 le point arbitraire pris pour origine des lacets ; si toutes les combinaisons possibles de lacets ne permettent d'échanger entre elles que p racines de l'équation, savoir, $u_0\, u_1 \ldots u_{p-1}$, il est clair que la fonction déduite par continuité de la valeur initiale u_0 n'aura nulle part que p valeurs au plus et ne présentera d'ailleurs que des singularités algébriques ; elle satisfera donc à une équation entière $\varphi(z, u) = 0$ qui sera du degré p par rapport à u ; z étant supposé constant et égal à ζ, l'équation $f(\zeta, u) = 0$ admettra toutes les racines de $\varphi(\zeta, u) = 0$; donc on aura

$$f(\zeta, u) = \varphi(\zeta, u)\, F(\zeta, u)$$

$F(\zeta, u)$ étant un polynôme entier en u ; comme cela a lieu pour toute

valeur de z il en résulte que l'on aura identiquement

$$f(z,u) = \varphi(z,u)\left[B_0 u^{m-p} + B_1 u^{m-p-1} + \dots + B_{m-p}\right]$$

les fonctions $B_0 B_1 \dots B_{m-p}$ seront évidemment des fonctions rationnelles ; on le voit d'ailleurs immédiatement en donnant à u, $m-p+1$ valeurs constantes arbitraires ; donc enfin l'équation $f(z,u)=0$ ne serait pas irréductible.

2°. — Il resterait pour compléter l'étude des fonctions algébriques, à donner le moyen de séparer autour de chaque point critique les groupes circulaires correspondants, et de former un système de lacets fondamentaux ; nous ne nous arrêterons pas à cette partie de la question qui exige d'assez longs développements ; dans les cas particuliers que nous pourrons rencontrer le problème se résoudra sans difficulté et indépendamment de toute théorie générale. — On trouvera d'ailleurs un exposé complet de cette théorie, d'après le mémoire de Puiseux sur les fonctions algébriques, dans le traité des Fonctions Elliptiques de Briot et Bouquet (pages 40 et suivantes)

Quinzième Leçon.

Fonctions Implicites _ Fonctions définies par des Intégrales.

I. Fonction implicite. — Si la fonction $f(z,u)$ au lieu d'être un polynôme, est une fonction quelconque, holomorphe dans le domaine $(z=a, u=b)$ et s'annulant pour $z=a$, $u=b$, l'équation $f(z,u)=0$ donne lieu à une théorie toute semblable à celle des fonctions algébriques ; nous avons vu que si pour $z=a$, l'équation a n racines égales à b, pour z voisin de a elle aura n racines voisines de b ; ces racines que nous supposerons finies se partageront en groupes s'échangeant circulairement autour du point a. — Si $n=1$, il existe une fonction de z holomorphe dans le domaine de a, se réduisant à b pour $z=a$, et vérifiant identiquement l'équation donnée ; mais cette condition $n=1$ exige qu'on ait $f'_u(a,b) = 0$.

Ainsi se trouve établie l'existence de la fonction implicite, que nous avions admise sans démonstration. Nous devons ajouter les remarques suivantes :

1°. – L'analogie avec les fonctions algébriques cesse quand on considère, soit une valeur infinie de z, soit une valeur finie à laquelle correspond une valeur infinie de u ; cela tient à ce que le point ∞ est en général un point singulier essentiel pour les fonctions transcendantes.

2°. – Quand on veut établir l'existence de la dérivée $\frac{du}{dz}$, il faut se servir du développement.

$$f(z+h, u+k) = f(u,z) + h\frac{df}{dz} + k\frac{df}{du} + \ldots\ldots$$

qui est illimité ; ce développement s'établit comme dans le cas des variables réelles à l'aide de la fonction.

$$\varphi(t) = f(z+ht, u+kt)$$

où t est une variable complexe de module ≤ 1.

3°. – Il est important d'observer que la fonction implicite holomorphe définie plus haut est la seule fonction continue vérifiant l'équation donnée et se réduisant à b pour $z = a$; en d'autres termes, si une fonction $\varphi(z)$ continue le long d'un certain chemin C aboutissant au point a, vérifie identiquement l'équation $f(u,z) = 0$ et se réduit à b pour $z = a$, elle coïncide le long de C, avec la fonction implicite considérée.

En effet, si nous posons $\varphi(z) = u + v$, u continuant à désigner la fonction implicite, on aura identiquement le long du chemin C

$$f(u+v, z) = 0 \qquad f(u,z) = 0$$

v étant supposée continue, on peut prendre z assez voisine de a pour que sur la portion conservée C' de la ligne C, $f(u+v, z)$ soit développable en série entière, et on a :

$$f(u,z) + v\, f'_u(u,z) + \ldots\ldots\ldots = 0$$

d'où

$$v\left[f'_u(u,z) + \frac{v^2}{2} f''_{u^2}(u,z) + \ldots\ldots\right] = 0$$

Si donc v n'étant pas identiquement nul, la parenthèse serait nulle pour toute valeur de z, tout le long de C' ; on aurait en faisant $z = a$, $v = 0$, d'où $f'_u(a,b) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc v est nul tout le long de C' et par suite $\varphi(z)$ coïncide avec u.

4°. – Enfin, on peut, dans le voisinage d'un point critique algébrique a, donner un développement simple de la fonction. – Si p racines égales à b s'échangent circulairement autour de a, on posera $z-a=z'^p$ et la variable z faisant p tours autour de a, z' fera un tour unique autour du point 0 ; comme la fonction u reprendra sa valeur initiale, il en résulte qu'elle sera une fonction uniforme de z' ; on aura donc :

$$u = b + A_1 (z-a)^{\frac{1}{p}} + A_2 (z-a)^{\frac{2}{p}} + \dots\dots$$

Dans le cas où la racine serait infinie et où $f(u,z)$ serait algébrique, z' serait un pôle de la fonction donnée, on aurait alors un développement de la forme :

$$u = A_0 + A_1 (z-a)^{\frac{1}{p}} + A_2 (z-a)^{\frac{2}{p}} + \dots\dots\dots\dots$$
$$+ B_1 (z-a)^{-\frac{1}{p}} + B_2 (z-a)^{-\frac{2}{p}} + \dots + B_q (z-a)^{-\frac{q}{p}}.$$

II Fonction inverse

– Supposons une équation de la forme

$$(1) \qquad u = f(z)$$

$f(z)$ étant une fonction holomorphe dans le domaine de $\underline{a}$ et telle qu'on ait $f'(a) = 0$. Soit $b = f(a)$; faisons décrire à la variable z un arc continu $\underline{c}$ à partir de $\underline{a}$; $\underline{u}$ décrira un arc continu $\underline{c}'$ à partir du point b ; aux différents points de c' correspondront les différents points de l'arc c ; z est donc une fonction de u, définie au moins le long de l'arc c', continue et vérifiant identiquement l'équation (1).

D'autre part nous savons qu'il existe une fonction $\varphi(u)$ se réduisant à $\underline{a}$ pour $u = b$, holomorphe dans le domaine de a et vérifiant identiquement cette même équation ; d'après la remarque 3°. du § précédent, on a identiquement, le long de C', $z = \varphi(u)$. Ainsi se trouve définie la fonction inverse de f ; elle est holomorphe tant qu'elle n'atteint pas une valeur pour laquelle $f'(z)$ s'annule, ou pour laquelle $f(z)$ cesse d'être holomorphe.

III. Intégrales des fonctions algébriques.

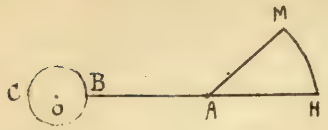
— Un autre exemple très-important de fonctions multiformes nous est fourni par l'intégration des fonctions algébriques ; cette opération constitue un moyen d'obtenir de nouvelles fonctions transcendantes, et c'est par cette voie qu'on s'est élevé à la notion des fonctions elliptiques.

Comme exemple nous ferons une étude complète de l'intégrale

$$(2) \quad u = \int_1^z \frac{dz}{z}$$

la fonction sous le signe présente un seul point singulier $z = 0$, qui est un pôle pour cette fonction ; ce sera aussi le seul point

singulier, à distance finie, de la fonction intégrale. — Soit A le point dont l'affixe est 1; construisons un lacet ayant pour origine A et pour extrémité le point zéro; tout chemin d'intégration conduisant de A à un point quelconque M(z) se ramène à un chemin particulier, par exemple le segment rectiligne AM, précédé d'un certain nombre de lacets; nous désignerons par $\varphi(z)$ l'intégrale rectiligne; pour avoir l'intégrale prise le long du lacet, imaginons qu'on aille de A en B, puis qu'on décrive la circonférence B C B dans le sens direct, puis qu'on revienne de B en A; aux deux passages en B $\frac{1}{z}$ aura la même valeur puisque cette fonction est uniforme dans les environs de 0; donc les deux parties rectilignes de l'intégrale se détruiront; l'intégrale relative au lacet complet se réduira donc à l'intégrale prise le long du cercle ce sera donc, ρ étant le rayon du cercle:



$$\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{\theta i}\, d\theta}{\rho e^{\theta i}} = 2i\pi$$

Revenons maintenant à l'intégrale (2); elle aura au point M une infinité de valeurs données par la formule:

$$(3) \qquad u = 2iK\pi + \varphi(z)$$

K étant un entier quelconque, positif ou négatif. — Il est d'ailleurs facile d'avoir une expression analytique de $\varphi(z)$ on peut en effet remplacer, dans l'intégration, le segment de droite AM, par le contour AHM, MH étant un arc de cercle décrit de O comme centre avec le rayon OM; si nous posons alors $z = Re^{\theta i}$, nous aurons.

$$(4) \qquad \varphi(z) = \int_1^R \frac{dx}{x} + i\int_0^\alpha d\theta = LR + i\alpha$$

La caractéristique L désignant la première de nos deux intégrales définies réelles. — Nous désignerons par $F(z)$ la fonction multiforme que nous venons de définir.

Propriété fondamentale de F(z).

— La propriété fondamentale de $F(z)$ consiste dans la relation

$$(\rho) \qquad F(zz') = F(z) + F(z')$$

qui résulte immédiatement de l'équation (4); mais on peut parvenir directement à cette relation en partant de l'équation de définition (1). On a en effet

$$F(x) = \int_1^x \frac{dz}{z} \qquad F(y) = \int_1^y \frac{dz}{z}$$

et l'équation $F(x)+F(y) = \text{const}$ peut s'écrire, en dérivant :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

ou encore

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

ou enfin $xy = \text{const}$; en d'autres termes les deux quantités xy et $F(x)+F(y)$ sont variables ou constantes en même temps ; elles sont donc fonctions l'une de l'autre et l'on a :

$$F(x)+F(y) = \mathcal{F}(xy)$$

Or si nous y faisons $y=1$, cette égalité se réduit à $F(x) = \mathcal{F}(x)$ on a donc

$$F(x)+F(y) = F(xy)$$

et cela quels que soient x et y ; c'est la propriété fondamentale de $F(z)$.

Inversion de l'intégrale — Si au lieu de considérer u comme une fonction de z, on considère au contraire z comme une fonction de u, on aura à chercher une expression analytique de z ; c'est ce qu'on appelle faire l'inversion de l'intégrale. Or il y a ici un grand avantage à faire cette inversion la fonction inverse étant beaucoup plus simple que la fonction directe. Considérons donc les équations :

$$u = F(z) \qquad\qquad z = \lambda(u)$$

Cherchons d'abord ce que devient F pour $z = \infty$; en faisant $z = \frac{1}{z}$ on obtient, soit directement sur l'intégrale, soit à l'aide de l'équation (ρ)

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = - F(z)$$

on en conclut que ∞ et 0 sont deux points singuliers de même nature pour la fonction $F(z)$; donc tant que u conservera une valeur finie, $\lambda(u)$ ne pourra être ni nul ni infini ; en particulier la fonction $\lambda(u)$ est finie pour toute valeur finie de u, $F(z)$ ne cesse d'être holomorphe que si z est nul ou infini ; donc cela n'arrive jamais pour aucune valeur finie de u ; enfin $F'(z) = \frac{1}{z}$ ne s'annule jamais pour une valeur finie de u ; donc enfin la fonction inverse est holomorphe pour toute valeur finie de la variable ; c'est donc une fonction entière ; voici quelles sont ses propriétés immédiates.

1°. — C'est une fonction entière

2°. — Elle se réduit à 1 pour $u=0$.

3°. — Elle admet la période $2i\pi$; cela résulte de l'équation (3)

4°. – Elle satisfait à la relation suivante, équivalente à l'identité (5)

$$\lambda(x+y) = \lambda(x) \cdot \lambda(y)$$

4°. – L'équation (1) donne:

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z} \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{du} = z$$

donc la fonction $\lambda(u)$ se reproduit par la dérivation.

5°. – Enfin l'équation (4) donne immédiatement

$$\lambda(X+iY) = e^X(\cos Y + i \sin Y)$$

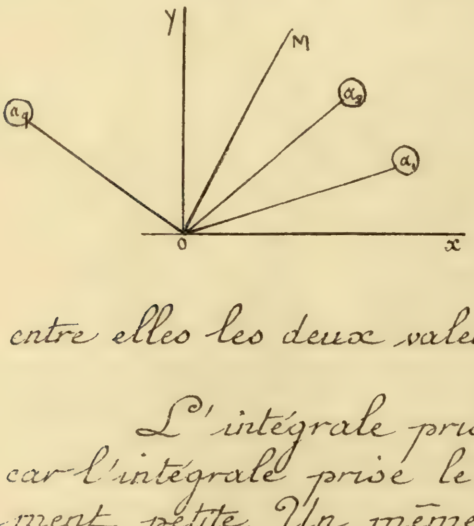
ce qui fournit l'expression analytique de la fonction; nous avons vu comment la propriété 4° fournirait son développement en série.

On retrouve ainsi toutes les propriétés des fonctions exponentielle et logarithmique.

IV – Intégrale hyperelliptique. – Etudions de même l'intégrale.

$$(6) \qquad u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{g(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_q)}}$$

aucune des quantités a_i n'étant nulle, et toutes étant distinctes. Nous allons trouver encore pour cette intégrale une infinité de valeurs; désignons par $\varphi(z)$ l'intégrale prise le long du chemin rectiligne $OM(z)$, quand on part de O avec une valeur bien déterminée du radical. Construisons les lacets ayant pour origine commune O et pour extrémités les points critiques $a_1, a_2 \ldots a_q$. Chacun de ces lacets échange entre elles les deux valeurs du radical. – Posons d'une manière générale



$$\varphi(a_i) = A_i$$

L'intégrale prise le long du lacet (a_i) se réduit à $2A_i$, car l'intégrale prise le long du cercle infiniment petit est infiniment petite. Un même lacet parcouru un nombre pair de fois consécutives donne une intégrale nulle et ramène en O la valeur initiale du radical; on peut donc n'en pas tenir compte. Si on parcourt successivement les deux lacets a_i et a_j, comme on revient en O après le premier trajet avec un changement de signe du radical, on a une intégrale égale à

$$2A_i - 2A_j$$

Ceci posé tout chemin allant de O à z peut être ramené,

sans qu'on franchisse aucun point singulier, au chemin rectiligne OM précédé d'un système de lacets.

Posons alors :

$$2A_1 - 2A_2 = \omega_1 \qquad 2A_1 - 2A_3 = \omega_2 \qquad 2A_1 - 2A_q = \omega_{q-1}$$

d'où

$$2A_i - 2A_j = \omega_{j-1} - \omega_{i-1}$$

l'ensemble des lacets parcourus donnera une intégrale de la forme

$$m_1\omega_1 + m_1\omega_2 \ldots\ldots + m_{q-1}\omega_{q-1}$$

m_1, m_2 étant des entiers positifs nuls ou négatifs. – D'autre part il peut rester un lacet a_1, non utilisé, avant qu'on ne s'engage dans le chemin rectiligne oz ; ce lacet ajouterait $2A_1$ et changerait le signe du radical ; en résumé nous voyons que u est susceptible, pour chaque valeur de z, des deux séries de valeurs suivantes :

$$u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \ldots\ldots + m_{q-1}\omega_{q-1} + \varphi(z)$$

$$u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \ldots\ldots + m_{q-1}\omega_{q-1} + 2A_1 - \varphi(z)$$

Les quantités $\omega_1\ \omega_2 \qquad \omega_{q-1}$ s'appellent les périodes ; nous allons voir immédiatement qu'elles ne sont pas indépendantes ; soit, en effet, un cercle décrit de 0 comme centre avec un rayon R assez grand pour entourer tous les points a_1, a_2, – ; l'intégrale prise le long de ce cercle est égale à la somme des intégrales prises le long de tous les lacets successivement ; on a donc :

$$(7)\quad 2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - \qquad + (-1)^{q-1} \cdot 2A_q = i\int_0^{2\pi} \frac{Re^{\theta i}\, d\theta}{\sqrt{g(Re^{\theta i} - a_1)(Re^{\theta i} - a_2) \cdots (Re^{\theta i} - a_q)}}$$

Si $q > 2$, en faisant croître R indéfiniment on a :

$$2A_1 - 2A_2 - 2A_3 \qquad + (-1)^{q-1} \cdot 2A_q = 0$$

Si q est pair cette égalité peut s'écrire

$$\omega_1 + (\omega_3 - \omega_2) + (\omega_5 - \omega_4) \qquad + (\omega_{q-1} - \omega_{q-2}) = 0$$

ou

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \qquad - \omega_{q-2} + \omega_{q-1} = 0$$

Si q est impair, on a :

$$2A_1 - (\omega_1 - \omega_1) - (\omega_4 - \omega_3) \qquad - (\omega_{q-1} - \omega_{q-2}) = 0$$

$$2A_1 + \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \qquad + \omega_{q-2} - \omega_{q-1} = 0$$

Dans le premier cas on a seulement $q-2$ périodes distinctes ; dans le second la formule fait connaître $2A_1$ en fonction des $q-1$ périodes qui sont alors distinctes ; on voit donc que le nombre des

périodes est le même pour $q = 2K$ et $q = 2K-1$.

Nous avons supposé $q > 2$. Si $q = 2$ le second membre de l'égalité (7) se réduit à

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{g}} = \frac{2i\pi}{\sqrt{g}}$$

On a donc une période unique

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\sqrt{g}}$$

Dans le cas ou $q = 3$ ou 4, il y a deux périodes distinctes.

Points singuliers. — Supposons que la limite supérieure z de l'intégrale tend vers l'une des valeurs $a_1\, a_2 \dots a_q$; Si nous posons

$$z = a_1 + t^2 \qquad dz = 2t\,dt$$

nous aurons :

$$u = \int_{\sqrt{a_1}}^{t}\frac{2\,dt}{\sqrt{g(a_1-a_2+t^2)(a_1-a_3+t^2)\dots(a_1-a_q+t^2)}}$$

et il faut voir ce que devient cette intégrale pour $t=0$. Elle est évidemment holomorphe; on peut donc, dans le domaine de a_1, mettre la fonction $\varphi(z)$ sous la forme

$$\varphi(z) = A_1 + B_1(z-a_1)^{\frac{1}{2}} + B_2(z-a)^{\frac{2}{2}} + \dots$$

les deux systèmes de valeurs de u se confondent ici

$$(8) \qquad u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \quad + m_{q-1}\omega_{q-1} + A_1$$

enfin le point a_1 est un point critique.

Fonction inverse. — Pour étudier la fonction inverse, cherchons les valeurs de l'intégrale pour z infini. — Posons $z = \frac{1}{\zeta}$ et prenons une limite inférieure quelconque.

$$u = \int^{\zeta}\frac{-d\zeta}{\zeta^{2-\frac{q}{2}}\sqrt{g(1-a_1\zeta)(1-a_2\zeta)-(1-a_q\zeta)}}$$

pour que l'intégrale reste finie pour $\zeta = 0$ il faut et il suffit que $2 - \frac{q}{2} < 1$ ou $q > 2$:

Nous pouvons maintenant, sans difficulté, nous rendre compte des propriétés de la fonction inverse

Tant que u n'atteint pas une valeur pour laquelle z soit infini ou égal à l'une des valeurs $a_1\, a_2 \quad a_q$, chaque valeur

de u est une fonction holomorphe de z ; donc z est une fonction holomorphe de u; supposons maintenant que u atteigne l'une des valeurs β contenues dans la formule (8); On a

$$u = \beta + B_1 (z-a_1)^{\frac{1}{2}} + B_2 (z-a_2)^{\frac{2}{2}} +$$

Donc $(z-a_1)^{\frac{1}{2}}$ est holomorphe par rapport à u, dans le domaine de β ; donc il en est de même du carré et par suite de z. – $(B_1 = 0)$

Donc la fonction inverse ne peut cesser d'être holomorphe qu'en devenant infinie; si $q = 2$ nous avons vu que u devient infinie avec z; donc z ne devient infinie pour aucune valeur finie de u, donc z est une fonction entière de u.

Si $q > 2$, l'intégrale $\varphi(z)$ conserve une valeur finie λ pour z infini ; donc les infinis de la fonction inverse sont contenus dans les formules :

$$u = \lambda + m_1 \omega_1 + m_1 \omega_2 \qquad + m_{q-1} \omega_{q-1}$$

$$u = 2A_1 - \lambda + m_1 \omega + m_1 \omega_1 \qquad + m_{q-1} \omega_{q-1}$$

Soit γ l'une de ces valeurs ; pour étudier la fonction z dans le domaine de γ il faut faire

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

$$u = -\int^{\zeta} \frac{\zeta^{\frac{q}{2}-2} \, d\zeta}{\sqrt{g(1-a_1\zeta)(1-a_2\zeta)-(1-a_q\zeta)}}$$

Supposons q pair ; comme q est au moins égal à 4, u est holomorphe par rapport à ζ dans le domaine de 0; on peut avoir aisement la forme du développement. On a en effet:

$$\frac{du}{d\zeta} = A_0 \zeta^{\frac{q}{2}-2} + A_1 \zeta^{\frac{q}{2}-1} + A_2 \zeta^{\frac{q}{2}} + \cdots\cdots$$

D'où :

$$u = \gamma + \frac{A_0}{\frac{q}{2}-1} \zeta^{\frac{q}{2}-1} + \frac{A_1}{\frac{q}{2}} \cdot \zeta^{\frac{q}{2}} + \cdots\cdots$$

Or si $q > 4$ il y a plusieurs racines qui tendent vers 0 pour $u = \gamma$, ζ et par suite z n'est donc pas uniforme dans les inversions de γ; si au contraire $q = 4$, $\frac{q}{2} - 1 = 1$, l'équation précédente a une seule racine nulle pour $u = \gamma$ et z est uniforme pour cette valeur de u.

Si q est impair posons

$$z = \frac{1}{\zeta^2} \qquad dz = \frac{-2\,d\zeta}{\zeta^3}$$

$$\frac{du}{d\zeta} = -\frac{2\,\zeta^{q-3}}{\sqrt{g(1-a_1\zeta^2)(1-a_2\zeta^2)-(1-a_q\zeta^2)}}$$

on voit de même que plusieurs valeurs de ζ tendent vers 0 pour $u=\gamma$, sauf dans le cas où $q = 3$. Ainsi la fonction z n'est uniforme autour de ses infinis que si q est égal à 3 ou à 4. Nous étudierons en particulier le cas où q est égal à 3 ou à 4 ; la fonction inverse est évidemment beaucoup plus simple à considérer que la fonction directe ; elle est en effet, d'après ce qui précède, méromorphe pour toutes les valeurs finies de u.

Seizième Leçon.

Inversion des Intégrales Elliptiques.

I. — Nous avons vu que l'intégrale

$$(1)\quad u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{g(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-b_q)}}$$

est une fonction multiforme, susceptible, pour chaque valeur de z d'un nombre infini de valeurs contenues dans les deux formules

$$u = \varphi(z) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \dots + m_{q-1}\omega_{q-1}$$

$$u = 2A_1 - \varphi(z) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \dots + m_{q-1}\omega_{q-1}$$

les quantités A, $\varphi(z)$, ω ayant des significations bien précises; en considérant au contraire z comme une fonction $F(u)$ de l'intégrale, on a

$$(2)\quad \begin{cases} F(u + m_1\omega_1 + \dots + m_{q-1}\omega_{q-1}) = F(u) \\ F(2A - u + m_2\omega_2 \dots\dots\dots) = F(u) \end{cases}$$

La fonction $F(u)$ admet donc les périodes $\omega_1, \omega_2 \dots$; si $q > 4$ le nombre des périodes distinctes est au moins égal à 3; de plus la fonction $F(u)$ cesse d'être uniforme; il faudrait donc, pour faire l'inversion en pareil cas, nous élever à la notion des fonctions absolument nouvelles pour nous; si au contraire $q = 2, 3$ ou 4, il y a une ou deux périodes au plus; $F(u)$ est une fonction uniforme et méromorphe pour toutes les valeurs finies de u; nous pouvons donc chercher soit à faire l'inversion à l'aide des fonctions circulaires et elliptiques, soit au contraire à retrouver par l'étude approfondie de l'intégrale, les propriétés fondamentales de ces transcendantes. C'est là la question que nous résoudrons maintenant, en commençant, pour plus de clarté par le cas où $q = 2$.

Soit donc

$$(3)\quad u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{g(z-a)(z-b)}}$$

Il y a une période unique

$$(4)\quad \omega = 2A - 2B = \frac{2\pi i}{\sqrt{g}} \quad A = \varphi(a) = \int_{z_0}^{a} \frac{dz}{\sqrt{g(z-a)(z-b)}}$$

Nous transformerons d'abord l'intégrale en posant

$$z = \frac{a+b}{2} + v \cdot \frac{a-b}{2} \qquad u\sqrt{-g} + \alpha = v$$

on a immédiatement

$$(5)\quad v = \int_{0}^{t} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

(α est une constante convenablement choisie). Supposons que l'on adopte, dans le calcul de $\varphi(t)$, la valeur initiale $+1$ du radical; on a ici

$$A = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \quad B = -\frac{\pi}{2} \quad 2A - 2B = 2\pi$$

Les formules (2) donnent en posant $F(v) = t$

$$F(v + 2k\pi) = F(v)$$

$$F(\pi - v + 2k'\pi) = F(v)$$

Nous savons de plus que $F(v)$ est une fonction entière; on voit immédiatement que si on décrit à partir de 0, deux chemins symétriques, les intégrales $\varphi(t)$ $\varphi(-t)$ sont égales et de signes contraires on a donc

$$F(-v) = -F(v)$$

Donc F est une fonction impaire de v; si on fait $k' = 0$ dans la dernière des équations précédentes, il vient

$$(6)\qquad F(\pi - v) = F(v)$$

d'où, en changeant v en $-v$

$$(7)\qquad F(\pi + v) = -F(v)$$

Enfin on a évidemment

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{F'(v)} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad F'(v) = \sqrt{1-t^2}$$

D'où en dérivant

$$F''(v) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,F'(v) = -F(v)$$

Donc en résumé

$F(v)$ est une fonction entière de v; elle est impaire, admet π comme période de seconde

espèce avec le multiplicateur -1 ; enfin elle se reproduit, changée de signe, par deux dérivations ; sa dérivée se réduit à $+1$ pour $u=0$.

On peut déduire de là toutes les autres propriétés de $F(v)$, en particulier par une identification son développement en série entière :

$$F(v) = \frac{v}{1} - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - $$

Nous désignerons cette fonction nouvelle par $\sin v$; l'équation (3) revient alors à l'équation finie

$$z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \sin(\alpha + u\sqrt{-g})$$

Revenons à l'équation (3), nous allons en déduire aisément le théorème d'addition de la fonction $\sin v$. Considérons simultanément la fonction $\cos v$ définie par la relation

$$\cos v = \sqrt{1-\sin^2 v}$$

et la condition $\cos 0 = 1$. Cette fonction de v est holomorphe ; en effet, elle ne pourrait cesser d'être uniforme que pour les valeurs de v telles qu'on ait $\sin v = \pm 1$. Or considérons l'une de ces valeurs, par exemple $\frac{\pi}{2}$. Posons

$$v = \frac{\pi}{2} + u \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}$$

Comme on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

Ainsi qu'on le voit en faisant $v = \frac{\pi}{2}+u$ dans (7), on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right)$ est une fonction paire de u ; en outre $u=0$ est une racine simple pour chaque facteur du radical ; on a donc

$$1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = Au^2 + Bu^4 + \ldots \quad A \neq 0$$

On en conclut

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = u\sqrt{A+Bu^2+\ldots}$$

et il est manifeste que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right)$ est holomorphe dans le domaine de $u=0$

Les propriétés de $\cos v$ se déduiraient sans peine de celles de $\sin v$; on aurait pu d'ailleurs se contenter d'observer que $\cos v$ est la dérivée de $\sin v$

Considérons maintenant deux variables quelconques x y liées par l'équation

$$(8)\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

Si nous posons

$$x = \sin u \qquad y = \sin v$$

cette équation (8) revient évidemment à

$$u + v = \text{const.}$$

On peut encore transformer autrement l'équation (8). On a en effet

$$d\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)=\left[\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy\right]\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)$$

Si on suppose que x, y satisfassent constamment à l'équation (8) on en deduit

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\text{const.}$$

ou encore

$$\sin u\cos v+\sin v\cos u=\text{const.}$$

Donc les deux fonctions $(\sin u\cos v+\sin v\cos u)$ et $(u+v)$ sont en même temps constantes ou variables ; on en conclut que l'une d'elles est une fonction de l'autre, en sorte qu'on a :

$$\sin u\cos v+\sin v\cos u=F(u+v)$$

Il suffit maintenant de faire $v=0$ et on trouve $F(u)=\sin u$; on a donc

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\sin v\cos u$$

Si on forme $1-\sin^2(u+v)$, qu'on extraie la racine et qu'on lève l'ambiguité de signe en faisant $v=0$ on trouve

$$\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v$$

On connait donc tous les éléments de la théorie des fonctions circulaires. Nous allons suivre exactement la même marche pour l'intégrale elliptique.

II — Intégrales elliptique. — Périodes. — Soit l'intégrale

$$u=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{g(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}}$$

Nous avons vu (1ère partie, page 98) qu'on peut toujours par une transformation rationnelle ramener cette intégrale, et aussi celle qui porterait sur un radical du 3e degré à la suivante

$$v = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{g}\,(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

g étant le multiplicateur, k le module ; – seulement ici g et k^2 seront des quantités complexes de nature quelconque ; nous pourrons encore prendre comme fonction $u\sqrt{g}$ et nous serons ainsi conduits à étudier, dans tous les cas l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Si nous posons, conformément à la théorie générale, en convenant de prendre $+1$ comme valeur initiale du radical

$$\varphi(1)=A \qquad \varphi\left(\frac{1}{k}\right)=B \qquad \varphi(-1)=C \qquad \omega = 2A-2C=4A$$

nous aurons pour les valeurs de u $\qquad \omega' = 2A-2B$

$$\varphi(z) - 4mA + 2m'(A-B)$$

$$2A - \varphi(z) + 4mA + 2m'(A-B)$$

La fonction inverse $z=F(u)$ sera, comme nous le savons, fractionnaire, et on aura de plus

$$F\left[u+4mA+2m'(A-B)\right] = F(u) \qquad F\left[(4m+1)2A+2m'(A-B)-u\right] = F(u)$$

Elle sera doublement periodique et ses periodes seront $4A$, $2A-2B$, mais nous trouverons avantage à introduire $2A$ au lieu de $4A$. On a en effet, d'après la dernière égalité

$$F(2A+u) = F(-u)$$

Or $F(u)$ est évidemment une fonction impaire (on le voit comme dans le cas précédent) ; on conclut

$$F(2A+u) = -F(u)$$

Nous pourrons donc dire que $F(u)$ admet les deux périodes $2A$, $2A-2B$; mais ce sera une fonction de seconde espèce, aux multiplicateurs $-1, +1$.

Nous nous arrêterons d'abord à l'examen de ces périodes. Nous poserons conformément à une notion constamment adoptée

$$(9) \quad K = \varphi(+1) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Nous introduisons une quantité $k'^2 = 1 - k^2$ et nous poserons

$$(10) \qquad K' = \varphi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

la valeur initiale du radical étant toujours $+1$. On aura alors:

$$2A = 2K \qquad 2A - 2B = 2K - \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = 2K - 2\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Or faisons la substitution

$$1 - k^2z^2 = k'^2t^2 \qquad k^2 z\,dz = k'^2 t\,dt$$

On a

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K - i\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

ou enfin :

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = K - iK' \qquad 2A - 2B = 2iB'$$

on aura donc en résumé les deux périodes $2K$, $2iK'$ définies par les intégrales (9) et (10) : nous établirons avant tout ce point important que le rapport de ces deux périodes est imaginaire ; ou en d'autres termes que dans $\frac{K'}{K}$ la partie réelle ne peut être nulle.

Supposons d'abord k^2 réel et compris entre zéro et un. K et K' sont alors deux intégrales rectilignes dont tous les éléments sont positifs ; leur rapport est donc réel et positif et le théorème est démontré.

Si k^2 est réel et plus grand que un, posons

$$k^2 = 1 + m^2$$

$$z = \sin\varphi$$

d'où $\quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1+m^2)\sin^2\varphi}} \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+m^2\sin^2\varphi}}$

K' est réel et K a toujours une partie réelle qui correspond à la partie de l'intégrale prise entre zéro et la valeur réelle, positive et inférieure à $\frac{\pi}{2}$ de φ qui annule le radical de cette intégrale.

Si k^2 est réel et négatif, posons

$$k^2 = -m^2$$

$$z = \sin\varphi$$

d'où
$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+m^2\sin^2\varphi}} \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1+m^2)\sin^2\varphi}}$$

et le rapport est l'inverse du précédent.

Abordons maintenant le cas où k^2 est une quantité imaginaire de la forme

$$k^2 = a + ib$$

désignons par K_0 l'imaginaire conjuguée de K, on aura $\frac{K'}{K} = \frac{K' K_0}{K K_0}$; comme le dénominateur est une somme de deux carrés réels, il suffit de considérer $K_0 K'$

On a
$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a-ib)\sin^2\varphi}} \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\psi}}$$

Effectuons le produit $K_0 K'$; nous obtiendrons une intégrale double. La règle que nous appliquons, établie pour les quantités réelles, s'établit immédiatement pour le cas d'éléments différentiels imaginaires $A+iB$ et $A'+iB'$, en écrivant

$$\int (A+iB)\,dx = \int A\,dx + i\int B\,dx$$
$$\int (A'+iB')\,dx = \int A'\,dx + i\int B'\,dx$$

et en multipliant ces égalités membre à membre. Il vient donc

$$K_0 K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{[1-(a-ib)\sin^2\varphi][1-(1-a-ib)\sin^2\psi]}}$$

Désignons le dénominateur de l'élément différentiel par $\alpha + i\beta$

$$\alpha + i\beta = \sqrt{[1-(a-ib)\sin^2\varphi][1-(1-a-ib)\sin^2\psi]}$$

La partie réelle de $K_0 K'$ est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha\, d\varphi\, d\psi}{\alpha^2+\beta^2}$$

Il suffit donc de prouver que α n'est pas nul. Or en élevant les deux membres de la dernière égalité au carré et en identifiant les coefficients des termes en i on trouve

$$2\alpha\beta = b(\sin^2\psi + \sin^2\varphi\cos^2\psi)$$

le second membre ne s'annule que pour $\varphi = \psi = 0$, mais on reconnaît immédiatement que c'est β qui s'annule alors, α étant égal à $+1$; on en conclut que α ne s'annule pas dans le champ d'intégration, et comme α est une fonction continue de φ et ψ, il conservera un signe constant.

Le rapport des deux périodes est donc toujours imaginaire; il en résulte qu'on pourra s'en servir pour couvrir le plan d'un réseau de parallélogrammes; on pourra alors se contenter d'étudier la fonction dans un de ces parallélogrammes.

III — Fonctions elliptiques.

— . Nous désignerons par <u>sn u</u> la fonction considérée et nous en introduirons en même temps deux autres cn u, dn u, en posant :

$$(11) \qquad z = \operatorname{sn} u \qquad \sqrt{1-z^2} = \operatorname{cn} u \qquad \sqrt{1-k^2 z^2} = \operatorname{dn} u$$

et en convenant que cn u, dn u se réduiront à $+1$ pour $u = 0$; les trois fonctions ainsi définies sont les fonctions elliptiques.

La fonction cn est ambigüe quand z est la variable indépendante, mais elle est uniforme quand u est pris pour variable; en effet, d'après la théorie des fonctions implicites il ne pourrait cesser d'en être ainsi que dans le voisinage d'une valeur de u annulant le radical. Or z ne se réduit à ± 1 que pour $u = \pm K$, en négligeant des multiples de périodes; considérons par exemple $u = K$. Posons

$$u = K + v$$

$$\operatorname{cn}(K+v) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(K+v)}$$

il s'agit de montrer que $\operatorname{cn}(K+v)$ est holomorphe dans le domaine de $v = 0$. Or on a

$$\operatorname{sn}(2K+v) = -\operatorname{sn}(v)$$

Changeons v en $v - K$

$$\operatorname{sn}(K+v) = \operatorname{sn}(K+v)$$

Donc les deux facteurs du radical sont impairs et admettent $v = 0$ comme racine simple, on a donc, dans le domaine de $u = 0$.

$$\operatorname{cn}(K+v) = \sqrt{Av^2 + Bv^4 + \dots} = v\sqrt{A + Bv^2 + \dots} \quad A \neq 0$$

donc cn est bien holomorphe pour la valeur considérée de u. On démontrerait de même que dn u est uniforme dans tout le plan.

On voit immédiatement que cn u, dn u sont des fonctions paires nous donnerons d'abord les propriétés immédiates de ces fonctions.

1° Zéros. — L'équation
$$\operatorname{sn} u = b$$
où b est une constante admet les zéros
$$u = \varphi(b) + 2mK + 2m'iK'$$
$$u = (2m+1)K + 2m'iK' - \varphi(b)$$

Si b est égal à 0, à ± 1, à $\pm \frac{1}{k}$, ces deux séries de valeurs se confondent; on voit sans peine que dans chaque parallélogramme il y a une solution unique; on a un seul zéro de $\operatorname{sn} u$, savoir $u = 0$; de même $\operatorname{sn}(u) = \pm 1$ n'admet qu'une racine K dans chaque parallélogramme; on a d'autre part
$$K - iK' = \varphi\left(\frac{1}{k}\right) \equiv K + iK'$$

On en conclut que les trois fonctions s'annulent une fois chacune le premier parallélogramme et les zéros sont:

pour $\operatorname{sn} u$ 0

pour $\operatorname{cn} u$ .... K

pour $\operatorname{dn} u$ .... $K + iK'$

On s'assure aisément, en considérant les dérivées, que ces zéros sont simples.

2° Effet d'une période. — Imaginons que la variable z aille de 0 à z après avoir décrit le lacet $(0, +1)$ on voit immédiatement que $\sqrt{1-z^2}$ aura changé de signe quand on reviendra à l'origine tandis que $\sqrt{1-k^2z^2}$ n'aura pas varié; on aura donc:
$$\operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u \qquad \operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u \qquad \operatorname{dn}(u+2K) = +\operatorname{dn} u$$
Si nous faisons au contraire précéder le chemin rectiligne de l'ensemble des deux lacets $(0, +1)$, $(0, +\frac{1}{k})$ parcourus successivement nous aurons tourné autour d'un point critique de dn considéré comme fonction de z; nous aurons alors
$$\operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u \qquad \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u \qquad \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u$$
En d'autres termes les multiplicateurs de sn, cn, dn sont respectivement
$$-1, +1 \qquad -1, -1 \qquad +1, -1.$$

3° Pôles. — On obtient les pôles en faisant la substitution:
$$z = \frac{1}{kz'} \qquad dz = -\frac{1}{k} \cdot \frac{dz'}{z'^2}$$
$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K + \int_{\frac{1}{k}}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$
$$\varphi(z) = K + iK - \int_1^{z'} \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k^2z'^2)}} = 2K - iK' - \varphi(z')$$

Si on pose $z = \operatorname{sn} u$, on aura

$$\pm z' = \operatorname{sn}(2K - iK' - u) = \frac{\pm 1}{k \operatorname{sn} u}$$

ou encore

$$\operatorname{sn}(iK' + u) = \pm \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$$

nous mettons un double signe, parce qu'on ignore pour chacune des intégrales $\varphi(z)$ $\varphi(z')$ la valeur initiale du radical ; mais nous lèverons cette ambiguité en faisant $u = K$ on aura alors

$$\operatorname{sn}(K + iK') = \operatorname{sn}(K - iK') = \frac{1}{k}$$

On aura donc en définitive

$$\operatorname{sn}(u + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$$

Les pôles de $\operatorname{sn} u$ seront donc les zéros de $\operatorname{sn}(u + iK')$; ils sont donnés par la formule

$$\pm iK' + 2mK + 2m'iK'$$

Il y en a un seul dans chaque parallélogramme des périodes

Il est clair que nos trois fonctions ont les mêmes infinis ; on a par exemple

$$\operatorname{cn}(u + iK') = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 u}} = \pm \frac{i \operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u}$$

On en conclut que $\dfrac{1}{\operatorname{cn}(u + iK')}$ est holomorphe pour $u = 0$ qui en est un zéro simple ; donc iK' est un pôle et un pôle simple de $\operatorname{cn} u$; on verrait qu'il en est de même pour $\operatorname{dn} u$.

4° Expression à l'aide des fonctions σ. —— Le rapport $\dfrac{iK'}{K}$ étant imaginaire on peut constituer une fonction σ aux deux périodes $2K$, $2iK'$, il suffit de faire $K = \omega_1$, $iK' = \omega_3$; observons en outre que nous pouvons dans tout ce qui précède remplacer k par $-k$ ce qui n'aurait d'autre effet que de changer le signe de K' et par suite le signe du coefficient de i dans le rapport des périodes ; nous admettrons naturellement qu'on ait choisi le point $\dfrac{1}{k}$ de manière à ce que ce rapport soit > 0 ce qui nous permettra d'introduire les fonctions θ.

Dans ces conditions on aura immédiatement (voir II page 115) les égalités :

$$(12) \qquad \operatorname{sn} u = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \qquad \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}$$

car dans chacune d'elles les deux membres ont mêmes périodes, mêmes multiplicateurs, même zéro, même infini, mêmes valeurs initiales ; nous pourrions maintenant considérer l'inversion comme faite et renvoyer aux propriétés des fonctions σ. Mais il est bon de voir comment on peut achever la théorie des fonctions elliptiques en ne se servant que de l'intégrale

Cherchons d'abord l'effet de la demi période iK'. On a

$$dn(u+iK') = \sqrt{1-\frac{1}{sn^2 u}} = \varepsilon\,\frac{cn\,u}{sn\,u}$$

ε étant égal à $\pm i$ – Pour lever l'ambiguité de signe, nous nous servirons des formules (12) (Si on ne tient pas à introduire les fonctions σ ce signe reste absolument arbitraire). Faisons $u = K = \omega$; on a en appliquant la règle de l'Hospital

$$\frac{\sigma_2'(\omega+\omega')}{\sigma_3(\omega+\omega')} = \varepsilon\,\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma(\omega)} \qquad \varepsilon = -i$$

On aura donc

$$dn(u+iK') = -i\,\frac{cn\,u}{sn\,u}$$

Changeons u en $u+iK'$ et observons que $dn(2iK') = 1$, nous aurons

$$-sn(u+iK')\,dn\,u = -i\,cn(u+iK') = -\frac{dn\,u}{K\,sn\,u}$$

On a donc en résumé

$$(13) \qquad sn(u+iK') = \frac{1}{K\,sn\,u} \qquad cn(u+iK') = \frac{-i\,dn\,u}{K\,sn\,u} \qquad dn(u+iK') = -i\,\frac{cn\,u}{sn\,u}$$

Nous terminerons par une remarque relative à la quantité K' qui, dans la théorie, ne figure que par son carré ; on a en faisant $u = K$

$$sn\,K = 1 \qquad cn\,K = 0 \qquad dn\,K = \sqrt{1-k^2}$$

Nous conviendrons de poser $k' = dn\,K$, ce qui lève toute ambiguité de signe.

IV — Théorème d'addition.

— Considérons deux variables x, y liées par la relation :

$$(14) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

On peut en avoir l'intégrale à l'aide des fonctions elliptiques ; il suffit de poser

$$x = sn\,u \qquad y = sn\,v$$

et l'équation (14) s'écrivant alors $d(u+v)=0$ exprime simplement que $u+v$ reste constant. On peut d'ailleurs avoir l'intégrale sous forme algébrique. Cette intégrale due à Euler, peut être obtenue par bien des procédés. Voici celui de Mr Darboux. Exprimons x et y à l'aide d'une même variable, en posant

$$(15)\qquad \frac{dx}{dt}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\qquad \frac{dy}{dt}=-\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

Si à l'aide de ces formules (15) on forme les deux combinaisons

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\qquad\qquad x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

et qu'on les divise membre à membre, on met l'équation (14) sous la forme

$$(16)\qquad \frac{x\dfrac{d^2y}{dt^2}-y\dfrac{d^2x}{dt^2}}{x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-2k^2xy\left(x\dfrac{dy}{dt}+y\dfrac{dx}{dt}\right)}{1-k^2x^2y^2}$$

Or cette équation s'intègre immédiatement les deux membres étant des dérivées logarithmiques et on a

$$\frac{x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}}{1-k^2x^2y^2}=\text{constante}$$

Remplaçons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par les valeurs (15) nous aurons immédiatement

$$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}=\text{const.}$$

On en conclut que le premier membre est une fonction de $u+v$; on fait $v=0$ et on en déduit que cette fonction est $\operatorname{sn}(u+v)$. Connaissant $\operatorname{sn}(u+v)$ on calcule $1-\operatorname{sn}^2(u+v)$; on en déduit $\operatorname{cn}(u+v)$ en faisant $v=0$ pour déterminer le signe; enfin un calcul analogue donne $\operatorname{dn}(u+v)$; on a ainsi les trois équations d'additions:

$$(17)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+v)=\dfrac{\operatorname{sn}u.\operatorname{cn}v.\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v.\operatorname{cn}u.\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2v}\\[2ex] \operatorname{cn}(u+v)=\dfrac{\operatorname{cn}u.\operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}v.\operatorname{dn}u.\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2v}\\[2ex] \operatorname{dn}(u+v)=\dfrac{\operatorname{dn}u.\operatorname{dn}v-k^2\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}v.\operatorname{cn}u.\operatorname{cn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2v}\end{cases}$$

Ces formules peuvent servir de point de départ à une théorie complète des fonctions elliptiques en y faisant $v = K$ on en déduit l'effet d'une demi première période :

$$sn(u+K) = \frac{cn\,u}{dn\,u} \quad cn(u+K) = -\frac{sn\,u}{dn\,u}K' \quad dn(u+K) = \frac{k'}{dn\,u}$$

Tous les résultats trouvés peuvent être résumés dans le tableau suivant

	$sn(-u) = -sn\,u$	$cn(-u) = cn\,u$	$dn(-u) = dn\,u$
Multiplicateurs	$-1 \quad +1$	$-1 \quad -1$	$+1 \quad -1$
Zéro	0	K	$K + iK'$
Pôle	iK'	iK'	iK'
$f(u+K) =$	$\frac{cn\,u}{dn\,u}$	$-K'\frac{sn\,u}{dn\,u}$	$K'\frac{1}{dn\,u}$
$f(u+iK') =$	$\frac{1}{K\,sn\,u}$	$-\frac{i}{K}\frac{dn\,u}{sn\,u}$	$-i\frac{cn\,u}{dn\,u}$
Dérivée	$cn\,u\;dn\,u$	$-sn\,u\;dn\,u$	$-K^2\,sn\,u\;cn\,u$

auquel il faut joindre les égalités (9) et (10) que nous reproduisons

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} \qquad (K^2+K'^2=1)$$

et les expressions des trois dérivées

$$\frac{d\,sn\,u}{du} = cn\,u \cdot dn\,u \qquad \frac{d\,cn\,u}{du} = -sn\,u \cdot dn\,u \qquad \frac{d\,dn\,u}{du} = -K^2\,sn\,u\,cn\,u$$

Dix septième Leçon

Courbes de genre un _ Cubiques.

I _ Intégrales abéliennes. ——. On appelle intégrale abélienne une intégrale de la forme

$$(1) \qquad I = \int^z R(x,y)\,dx$$

R étant une fonction rationnelle de x et de y, y une fonction algébrique de x définie par l'équation

$$(2) \qquad F(x,y) = 0$$

Dans l'étude de l'intégrale (1) la courbe représentée par l'équation (2) a naturellement une importance particulière. _ Lorsque cette courbe est de degré n, et qu'elle a un nombre de points doubles égales à δ, le nombre

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \delta$$

est nécessairement positif ou nul, à moins que la courbe ne se scinde en courbes de degré inférieur. Ce nombre g est ce qu'on appelle le genre de la courbe (2). S'il est égal à 0, la courbe est unicursale. On a vu, (1ère Partie, page 90) que dans ce cas, et seulement dans ce cas, les coordonnées de chaque point de la courbe peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'un paramètre u :

$$(3) \qquad x = f(u) \qquad\qquad y = \varphi(u)$$

La substitution de u à x ramène alors la différentielle $R(x,y)dx$ à la forme $\mathcal{R}(u)\,du$, $\mathcal{R}$ étant une fonction rationnelle _ L'intégrale I peut alors s'obtenir à l'aide des fonctions rationnelles et de logarithmes

Considérons le cas où f et φ sont des fonctions fractionnaires doublement périodiques, aux mêmes périodes 2ω, 2ω'. On aura alors :

$$R(x,y)\,dx = R\left[f(u), \varphi(u)\right] f'(u)\,du = \mathcal{R}(u)\,du.$$

$\mathcal{R}(u)$ étant une fonction fractionnaire doublement périodique aux périodes 2ω, 2ω' ; on peut alors, d'après le théorème d'Hermite, représenter

$R(u)$ par une somme de termes de la forme

$$c + A\zeta(u-a) + A_1\zeta'(u-a) + \dots + A_p\zeta^{p}(u-a)$$

Mais une pareille somme s'intègre immédiatement et a pour intégrale

$$cu + AL\,\sigma(u-a) + A_1\zeta(u-a) + \dots + A_p\zeta^{(p-1)}(u-a).$$

La détermination de l'intégrale I s'achève donc comme pour le cas d'une courbe (2) unicursale ; mais elle contiendra des fonctions doublement périodiques. – On voit par là, l'intérêt que présentent les courbes représentées par les équations (3) où f et φ sont des fonctions fractionnaires et doublement périodiques.

II – Courbes de genre un. —. Les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$ pouvant l'une et l'autre s'exprimer rationnellement à l'aide d'une fonction elliptique et de sa dérivée (voir page 113), nous dirons d'une manière générale que x et y sont des fonctions elliptiques de u, et nous sous entendrons qu'elles ont les mêmes périodes. On peut d'ailleurs donner une expression régulière de ces fonctions. Supposons qu'on les exprime à l'aide de $p.u$ $p'u$. On aura d'abord

$$x = \frac{A}{C} \qquad\qquad y = \frac{B}{C}$$

A, B, C étant les 3 fonctions entières de pu, $p'u$. Or chacune de ces fonctions aura un pôle unique 0, (on ne considère qu'un parallélogramme des périodes). Soit n le degré maximum de ce pôle dans les trois fonctions A, B, C. La formule de Mr Hermite donne, en remarquant que le résidu du pôle multiple est nul dans chacune des trois fonctions :

$$A = a_1 + b_1\zeta'(u) + c_1\zeta''(u) + \dots + l_1\zeta^{(n-1)}(u)$$

ou en introduisant pu $p'u$,

$$A = a_1 + b_1\,pu + c_1\,p'u + \dots\ l_1\,p^{(n-2)}(u)$$

on en conclut que les coordonnées homogènes $x\,y\,z$ de chaque point de la courbe seront (Halphen – Fonctions elliptiques Tome II page 415), les coefficients a_i b_j .... étant proportionnels à des constantes

$$x = a_1 + b_1\,pu + \dots + l_1\,p^{(n-2)}(u) = f_1(u)$$

$$y = a_2 + b_2\,pu + \dots + l_2\,p^{(n-2)}(u) = f_2(u)$$

$$z = a_3 + b_3\,pu + \dots + l_3\,p^{(n-2)}(u) = f_3(u)$$

Il est évident que cette courbe est algébrique. On a facilement son degré ; si on cherche en effet les points où elle coupe la droite

$$(5) \qquad Ax + By + Cz = 0$$

ces points sont donnés par les valeurs de u appartenant à un m[illegible] parallélogramme et telles qu'on ait :

$$(6) \qquad Af_1(u) + Bf_2(u) + Cf_3(u) = 0$$

Or le premier membre de cette équation est une fonction elliptique à n pôles ; elle admet donc n zéros. Donc la courbe est du degré n.

Cherchons maintenant le genre g. Si nous écrivons que la droite (5) passe par un point $\alpha\beta\gamma$ du plan, et qu'elle est vérifiée par deux valeurs infiniment voisines de u, nous aurons en éliminant A, B, C :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ f_1(u) & f_2(u) & f_3(u) \\ f'_1(u) & f'_2(u) & f'_3(u) \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation (voir 1ère partie page 91) est vérifiée par les points de contact des tangentes menées de (α, β, γ) et aussi par les points de rebroussement. Son degré est donc égal à

$$n(n-1) - 2d - 3r + r = n(n-1) - 2\delta$$

δ étant le nombre des points doubles (d et r désignant du le nombre des points doubles et celui des points de rebroussement, et on suppose qu'il n'y a pas de singularités d'ordre plus élevé.)

Or Δ est une fonction elliptique à $2n$ pôles, car si on forme le mineur

$$f_i f'_j - f_j f'_i$$

on voit immédiatement que les termes contenant p avec l'indice de dérivation le plus élevé, $(2n-1)$ disparaissent. Cet indice se réduit donc à $2n-2$. Donc 0 est un pôle d'ordre $2n$ de Δ. Donc $\Delta = 0$ admet $2n$ racines ; on a donc :

$$n(n-1) - 2\delta = 2n \qquad \delta = \frac{n(n-3)}{2} \qquad g = \frac{(n-1)(n-2) - n(n-3)}{2} = 1$$

de là le théorème suivant :

Théorème ——. Si les coordonnées de chaque point d'une courbe s'expriment par des fonctions elliptiques d'un même argument, à n pôles, la courbe est algébrique, du degré n et du genre 1.

La réciproque est exacte et peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — . Lorsqu'une courbe algébrique est de genre 1, les coordonnées de chaque point peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques, à n pôles, d'un même argument.

La démonstration de ce théorème est compliquée ; nous nous contenterons de l'esquisser.

En général, une courbe de degré n' est définie par $\frac{n'(n'+3)}{2}$ points. Soit C' une pareille courbe, δ le nombre des points doubles de la courbe C ; assujettissons C' à passer par les points doubles de C et en outre par $\frac{n'(n'+3)}{2} - \delta - 1$ points simples pris également sur C ; la courbe C' ne sera déterminée qu'à un point près ; le nombre total des points fixes communs à C et C' sera :

$$2\delta + \frac{n'(n'+3)}{2} - \delta - 1 = \delta - 1 + \frac{n'(n'+3)}{2} = \frac{n(n-3)+n'(n'+3)}{2} - 1$$

Il est impossible de déterminer n' de telle sorte qu'il ne reste qu'un point d'intersection variable, car alors la courbe C serait unicursale. — Cherchons à déterminer n' de telle sorte que le nombre des points variables soit égal à $\underline{2}$; nous aurons :

$$\frac{n'(n'+3)+n(n-3)}{2} + 1 = nn'$$

ou

$$n'^2 - n'(2n-3) + n(n-3) + 2 = 0$$

cette équation admet deux racines entières $n' = n-1$ $n' = n-2$.

Prenons par exemple des courbes C' variables de degré $(n-2)$. Soit $S = 0$ $S' = 0$ les équations de deux d'entre elles ; les courbes C' formeront un faisceau

$$(6) \qquad S + \lambda S' = 0$$

Entre cette équation et celle de C, $F(x,y) = 0$ éliminons y ; il viendra une équation entière en x de degré nn', à coefficients entiers par rapport à λ ; $nn'-2$ racines de cette équation finale seront connues d'avance, on pourra donc en débarrasser l'équation qui se réduira à la forme

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

A, B, C étant trois polynômes entiers en λ. L'équation $B^2 - AC = 0$ fournira les valeurs de λ telles que les courbes (6) soient tangentes à C en un point M. Or on démontre :

1° Qu'il y a seulement 4 courbes C' tangentes à C en un point M distinct des points fixes qui ont servi à constituer le faisceau

2° Que les valeurs de λ correspondant au cas où M coïnciderait avec un des points fixes sont d'un ordre pair de multiplicité

Il résulte de là qu'on peut écrire

$$B^2 - AC = M^2 N$$

M, N étant deux polynômes entiers dont le second est du 4e degré en λ; on aura alors:

$$x = \frac{-B + M\sqrt{N}}{A}$$

Donc x s'exprime en fonction rationnelle de λ et $\sqrt{N}$

En éliminant x au lieu de y, on exprimerait y en fonction rationnelle de λ et d'un radical $\sqrt{N_1}$; mais les équations $N=0$ $N_1=0$ ont les mêmes racines puisqu'elles doivent déterminer les mêmes quatre courbes du faisceau C'. Donc enfin:

Les coordonnées de chaque point de C peuvent être exprimées sous la forme

$$(7) \quad x = \mathcal{R}(\lambda, \sqrt{N}) \qquad y = \mathcal{R}_1(\lambda, \sqrt{N})$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ étant des fonctions rationnelles

Faisons maintenant la transformation de Legendre:

$$x = \frac{p + qt}{1 + t}$$

On ramènera $\sqrt{N}$ à la forme:

$$\sqrt{N} = \sqrt{g(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

Posant alors

$$t = \mathrm{sn}\,u \qquad \sqrt{N} = \sqrt{g}\ \mathrm{cn}\,u.\mathrm{dn}\,u$$

on voit que x, y se trouveront exprimées par des fonctions fractionnaires doublement périodiques, aux périodes $4K$, $2iK'$; ce qui démontre le théorème énoncé

Revenons maintenant à l'intégrale I. On commencera par compter les points doubles de la courbe auxiliaire $F(x,y) = 0$. Si le genre de la courbe est 1, à l'aide d'un faisceau de courbes on mettra d'abord les coordonnées sous la forme (7); on fera ensuite la transformation de Legendre, et on sera ramené à la forme (3); il suffira de faire la transformation de Mr Hermite pour obtenir l'intégrale.

III — Propriétés des courbes du 3e ordre. —

La forme particulière (4) donnée aux équations d'une courbe de genre I, met en évidence un grand nombre de leurs propriétés géométriques. Nous donnerons un exemple de ce genre d'applications en considérant seulement le cas le plus intéressant $n = 3$. La courbe est alors du 3e degré et sans point double. Ses équations sont

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= a_1 + b_1\,pu + c_1\,p'u = f_1(u) \\ y &= a_2 + b_2\,pu + c_2\,p'u = f_2(u) \\ z &= a_3 + b_3\,pu + c_3\,p'u = f_3(u \end{aligned}$$

L'intersection de la cubique avec une courbe de degré n $f(x,y,z)=0$ sera donnée par

$$f(f_1 f_2 f_3)=0$$

dont le 1er membre est une fonction elliptique à $3n$ pôles ; comme ces pôles ont une somme nulle ; il en est de même des zéros correspondants ; les points d'intersection satisferont donc à la condition

$$(9) \qquad u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{3n}\equiv 0$$

Le signe $\equiv$ indiquant l'égalité à $2m\omega+2m'\omega'$ près

Par exemple, si $n=2$; on aura :

$$(10) \qquad u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6\equiv 0$$

et cette condition est nécessaire pour que les 6 points $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6$ soient sur une même conique. – Elle est d'ailleurs suffisante ; faisons en effet passer une conique par les cinq premiers points $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$, elle coupera la cubique en un sixième point v et l'on aura :

$$u_1=u_2+\ldots+u_5+v\equiv 2m_1\omega+2m'_1\omega'$$

Si on compare les deux dernières équations, on en conclut que $v=u_6$ à une période près.

La condition $\qquad (11) \qquad u_1+u_2+u_3\equiv 0$

exprime de même la condition nécessaire et suffisante pour que 3 points de la cubique soient en ligne droite. – Si $n>2$ la condition (9) est nécessaire mais non plus suffisante pour que les $3n$ points considérés soient sur une courbe de degré n.

Ceci posé, soient

$$\begin{array}{lll} M_1(u_1) & N_1(v_1) & P_1(w_1) \\ M_2(u_2) & N_2(v_2) & P_2(w_2) \\ M_3(u_3) & N_3(v_3) & P_3(w_3) \end{array}$$

neuf points situés sur la cubique ; supposons en ligne droite ceux qui sont écrits sur une ligne horizontale, on aura :

$$u_1+v_1+w_1\equiv 0 \qquad u_2+v_2+w_2\equiv 0 \qquad u_3+v_3+w_3\equiv 0$$

On en conclut $\qquad (u_1+u_2+u_3+v_1+v_2+v_3)+(w_1+w_2+w_3)\equiv 0$

Si nous supposons alors les 6 points (M,N) sur une conique, la première parenthèse $\equiv 0$, donc il en est de même de la seconde, et les points P sont en ligne droite. Donc :

Théorème. — Lorsque trois couples de points d'une cubique sont sur une même conique, les trois cordes correspondantes vont couper la cubique en trois autres points qui sont en ligne droite.

En supposant que certains couples de points coïncident, on aura des cas particuliers intéressants ; par exemple :

1° Étant donné deux points A et B sur la courbe, on peut de quatre manières en trouver un troisième C tel qu'il y ait une conique tangente en A, B, C à la cubique. Les tangentes en A, B, C, rencontrent la cubique en trois points qui sont en ligne droite.

Si $u_1 u_2$ sont les arguments de A, B, celui de C sera donnée par:

$$2u_3 = -2u_1 - 2u_2 + 2m\omega + 2m'\omega'$$

ce qui donne seulement quatre points distincts:

$$u_3 = -u_1 - u_2 \qquad u'_3 = -u_1 - u_2 + \omega \qquad u''_3 = -u_1 - u_2 + \omega' \qquad u'''_3 = -u_1 - u_2 + \omega + \omega'$$

2° Si on suppose que la conique se réduise à deux droites confondues, on a le théorème:

Trois tangentes dont les points de contact sont en ligne droite coupent la cubique en trois autres points qui sont aussi en ligne droite.

Les points d'inflexion sont fournis par un cas particulier de cette dernière propriété; nous y reviendrons tout à l'heure.

Classe de la courbe. —— L'équation $\Delta = 0$ a ici 6 pôles; donc la cubique est de la 6e classe. D'un point P on peut lui mener 6 tangentes dont les points de contact sont sur une même conique – Si le point est sur la courbe il n'y a que quatre tangentes – Soit v l'argument de P, u_1, u_2, u_3, u_4 ceux des points de contact on a:

$$2u_i + v = 2m\omega + 2m'\omega'$$

On ne peut donner à m, m' que les valeurs 0, 1; on a donc:

$$(12) \quad u_1 = -\frac{v}{2} \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega \quad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega' \quad u_4 = -\frac{v}{2} + \omega + \omega'$$

Les points de contact sont donc complètement déterminés; on a:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 2v = 2\omega + 2\omega' \equiv 0$$

Donc la conique qui passe par P et les quatre points correspondants touche la cubique au point P.

Cette conique est la polaire de P par rapport à la cubique. On sait qu'elle ne peut se réduire à deux droites que dans le cas d'un point d'inflexion. Si P est un point d'inflexion on a $3v \equiv 0$. L'équation

$$2u_i + v = 2m\omega + 2m'\omega'$$

admet d'abord la solution $u_i = v$, et il reste trois tangentes seulement distinctes de la tangente en P. Les trois points de contact sont sur une droite; on a en effet

$$u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{3v}{2} + \omega + \omega' \equiv 0$$

car $-\frac{3v}{2} + \omega + \omega'$ est évidemment une période.

Théorème de Salmon. —— Le point P étant supposé mobile, il est clair que le rapport anharmonique ρ des quatre tangentes $(vu_1)(vu_2)(vu_3)(vu_4)$ est une fonction elliptique de v; il suffit de regarder les valeurs (12) pour voir que jamais deux des tangentes ne peuvent avoir la même direction; cela est

d'ailleurs facile à voir géométriquement. Donc p ne peut jamais devenir infini ; cette fonction p est donc une simple constante. De là le théorème suivant.

Théorème. —. Le rapport anharmonique des 4 tangentes menées d'un point P situé sur la courbe est indépendant de la position de ce point.

Revenons aux points d'inflexion. Chacun d'eux pouvant être considéré comme formé de 3 points confondus en ligne droite, l'équation qui les détermine est :

$$3u = 2m\omega + 2m'\omega'$$

on en conclut 9 points d'inflexion correspondant aux valeurs de m situées dans le tableau suivant :

00	01	02
10	11	12
20	21	22

On voit immédiatement que chaque ligne horizontale donne trois points situés en ligne droite. Ces trois droites forment un triangle d'inflexion ; on reconnaît également qu'on obtient des triangles d'inflexion soit à l'aide des 3 colonnes verticales, soit à l'aide des trois éléments qui, dans un déterminant fourniraient des termes affectés du signe +, soit à l'aide des trois éléments qui fourniraient des termes affectés du signe −.

Points Steiner. —. On appelle point Steiner un point où la cubique admet une conique surosculatrice c'est-à-dire la rencontrant en 6 points confondus ; un pareil point S est défini par l'équation

$$6u \equiv 0$$

Or soit v l'argument correspondant au point Q où la tangente en S rencontre la cubique, on aura :

$$v + 2u \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad 3v + 6u \equiv 0$$

$$\text{d'où enfin} \quad 3v \equiv 0$$

Donc v est un point d'inflexion. De là le théorème suivant :

Il existe 27 points Steiner sur une cubique ; ils se décomposent en 9 groupes dont chacun est formé des points de contact des tangentes issues d'un point d'inflexion.

Transformation homographique. —. Remarquons enfin que d'après les équations (8) toute courbe du 3e ordre peut être considérée comme la transformée homographique de la suivante :

$$x = p(u) \quad y = p'(u) \quad z = 1$$

dont l'équation algébrique, est d'après la relation connue en p et p'

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

On déduit bien aisément de ce fait la valeur de la constante qui figure dans le theorème de Salmon ; on peut en effet considérer la courbe précédente puisqu'il ne s'agit d'évoluer qu'un élément projectif, et en outre, mener les tangentes du sommet de la courbe, lequel a pour argument $(\omega'+\omega')$. Les coefficients angulaires des tangentes sont deux à deux égaux et de signes contraires. On trouve facilement, en conservant les notions de la page 109

$$\mathcal{R} = \frac{p(\omega_\alpha) - p(\omega_\gamma)}{p(\omega_\beta) - p(\omega_\gamma)} = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\beta - e_\gamma}$$

IV — Intersection de deux quadriques.

— La même représentation analytique s'applique sans difficulté à l'intersection de deux surfaces du second ordre ; écrivons leurs équations sous la forme suivante

$$(13) \quad \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z = 0 \\ &A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z = 0 \end{aligned}$$

l'origine étant un point quelconque de la courbe. On pourra représenter cette courbe par les relations

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &x = \lambda z \qquad y = \mu z \\ &\frac{A\lambda^2 + A'\mu^2 + 2B''\lambda\mu + 2B'\lambda + 2B''\mu + A''}{C\lambda + C'\mu + C''} = \frac{A_1\lambda^2 + A'_1\mu^2 + 2B''_1\lambda\mu + \ldots + A''_1}{C_1\lambda + C'_1\mu + C''_1} = -\frac{1}{z} \end{aligned} \right.$$

La dernière des équations (14) donne une équation du 3e degré entre λ et μ ; en y regardant λ, μ comme des coordonnées, elle représente une cubique et on peut exprimer λ, μ en fonctions elliptiques d'un paramètre ; ces mêmes équations (14) montrent que z, et par suite x, y seront des fonctions elliptiques. En introduisant des coordonnées homogènes et en remarquant que ces fonctions doivent avoir quatre pôles, un plan coupant toujours la courbe en 4 points, on aura :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= a_1 + b_1\, pu + C_1\, p'u + l_1\, p''u \\ y &= a_2 + b_2\, pu + C_2\, p'u + l_2\, p''u \\ z &= a_3 + b_3\, pu + C_3\, p'u + l_3\, p''u \\ t &= a_4 + b_4\, pu + C_4\, p'u + l_4\, p''u \end{aligned} \right.$$

De ces équations on tire un grand nombre de conséquences analogues à celles que nous avons obtenues pour les cubiques planes.

La condition nécessaire et suffisante pour que u_1, u_2, u_3, u_4 soient les

arguments de quatre points situés dans un même plan est

$$(16) \quad u_1+u_2+u_3+u_4 \equiv 0$$

le plan osculateur en u coupe la courbe en un point v tel qu'on ait

$$3u+v=2m\omega+2m'\omega'$$

A quatre points dans un même plan correspondront quatre points v, tels qu'on ait :

$$v_1+v_2+v_3+v_4+3(u_1+u_2+u_3+u_4) \equiv 0$$

Donc

$$v_1+v_2+v_3+v_4 \equiv 0$$

Donc les plans osculateurs en quatre points situés dans un même plan, coupent la courbe en quatre autres points également dans un même plan.

Les points stationnaires où le plan osculateur a un contact du 3e ordre sont donnés par l'équation

$$4u=2m\omega+2m'\omega'$$

On peut donner à m et à m' toutes les valeurs 0, 1, 2, 3 ; de là 16 points stationnaires ; on reconnait aisément qu'ils sont 4 par 4 dans un même plan. Leur théorie est analogue à celle des points d'inflexion d'une cubique plane.

Si par deux points fixes $A(v)$, $B(w)$, on mène des plans tangents, les points de contact u sont déterminés par l'équation

$$2u+v+w=2m\omega+2m'\omega'$$

On ne peut attribuer à m m' que les valeurs 0, 1, de là quatre points de contact ; on s'assure aisément que jamais deux des points considérés ne peuvent être dans un même plan avec A et B ; cela est d'ailleurs évident puisqu'un pareil plan couperait la courbe en 6 points ; il suit de là que le rapport anharmonique des quatre plans est, en considérant A comme fixe, une fonction doublement périodique de w, et que cette fonction ne peut jamais devenir infinie ; c'est donc une simple constante. Mais il est clair qu'elle ne peut davantage dépendre de v ; donc :

Par une corde AB de la biquadratique, on peut lui mener quatre plans tangents, dont le rapport anharmonique est constant quand la corde AB varie.

Nous n'insisterons pas plus longuement sur ces propriétés. (Voir Halphen Tome II, page 451).

Remarquons seulement que nous avons supposé que l'équation (14)

en $\lambda\mu$, ne représentait pas une cubique à point double ; s'il en était ainsi, en appelant $\lambda_0 \mu_0$ les coordonnées du point double, on pourrait faire $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, car cela revient à remplacer $\lambda\mu$ par $\lambda + \lambda_0$, $\mu + \mu_0$; les conditions pour qu'il en soit ainsi seraient alors

$$A''C''_1 = A''_1 C'' \qquad 2B'C''_1 + A''C_1 = 2B'_1 C'' + A''_1 C \qquad 2B''C''_1 + A''C'_1 = 2B''_1 C'' + A''_1 C'$$

Or elles expriment, comme on le voit aisément, ou que les deux quadriques se touchent en deux points, ou qu'elles ont une génératrice commune. Dans ce dernier cas, l'intersection proprement dite est une cubique gauche, et il résulte de ce qui précède, qu'on peut exprimer les coordonnées de chaque point par des fonctions rationnelles d'un paramètre.

Fin de la 2ème Partie.

Imp. F. Hermet, 70, Rue de Rennes. Paris

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

14 DAY USE
RETURN TO DESK FROM WHICH BORROWED
ASTRON-MATH-STAT.
LIBRARY
This book is due on the last date stamped below, or
on the date to which renewed.
Renewed books are subject to immediate recall.

LD 21-40m-10,'65
(F7763s10)476

General Library
University of California
Berkeley

ASTRONOMY MATHEMATICS-STATISTICS LIBRARY

U.C. BERKELEY LIBRARIES

C037545741

60301

QA300
D4
V.2
Math.
dept.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY